四元数・八元数とディラック理論



森田克貞

日本評論社

はじめに

この本の標題「四元数・八元数とディラック理論」をご覧になって，ディラック理論は有名なのでよく知られているが，それと，四元数・八元数がどんな関係にあるのだろうかと疑問に思われる方も少なくないに違いない (実は，四元数とLorentz 群・Dirac 方程式の関係は古くから議論されてきた．伝統的な四元数アプローチの歴史を知る上で重要と思われる文献は，できるだけ引用するように努めた)．そのため，本来短くて然るべき「はじめに」の欄とはいえ，本書の底辺を流れる考え方と具体的内容の若干でも詳しく述べてみることが適当かと思う．それにより，本書が，従来の四元数アプローチとは異なるスタンスに立っていることを明確にしたい．

場の理論における対称性は，深遠な構造的概念であり，その美しさは,「美は真なり」を信ずる多くの物理学者を惹きつけてやまない．現在の素粒子の標準理論を支えるゲージ理論は，Einstein の特殊・一般相対性理論がその嚆矢となった「対称性の原理」(対称性が相互作用を決めるという原理) の発展から生まれたものである．もちろん，素粒子の標準理論におけるゲージ理論は「対称性の自発的破れ」と「Higgs 機構」および「繰り込み可能性」が相伴って，始めて現実の世界に合う理論を提供する．現在では，基本的な物質粒子として，スピン 1/2 のクォーク・レプトンが 3 世代存在することが実験からわかっている．ニュートリノの質量にまつわる問題をのぞいて，標準理論は素粒子の相互作用を正しく記述している．

一方，重力は素粒子のレベルでは無視できるが，スピン 1/2 の粒子の重力相互作用を決めるには，Einstein の一般相対性理論に，計量テンソルを一意的に決めるが，それから一意的には定まらない，四脚場を持ち込まねばならないことが旧くから知られていた．内山は一般な Lie 群に基づくゲージ理論を建設した際，四脚場を用いて重力のゲージ理論を定式化し，それは曲率だけでなく捩率をも併せ持つ Riemann-Cartan 時空上の Poincaré ゲージ理論に発展した．この

振率をもたらすのがスピン 1/2 (一般には半奇数スピン) の粒子である．従って，理論的には，ミクロな時空構造は (連続なら) Riemann-Cartan 的とするのが自然であるが，マクロにはスピンは平均化されてゼロになるので，マクロ的には時空は Riemann 空間で記述される．

「対称性の原理」の発展の中でも超対称性の発見はある意味で画期的であった．超対称性はフェルミオンとボソンを交換する，数学的・抽象的な対称性であるが，それを局所的にしたものが超重力理論である．それは四脚場が本質的役割を果たすという意味で，Poincaré ゲージ理論に新しい概念を付け加えた重力のゲージ理論ともいえる．超対称粒子など，その痕跡はいまだ実験的に見つかっていないとはいえ，超対称性理論が，場の量子論に新しい章を付け加え，その物理的・数学的応用分野が飛躍的に拡大したことは事実である．超対称粒子も含め，実験的に検証されていない粒子として，標準理論で最重要な役割を果たす Higgs 粒子がある．これら未発見のものを探す実験的研究はもちろん既に長い間組織的に継続されており，期待の大きい計画も実施に移されつつある。その成果は，将来，大きな驚きをもたらすことであろう．

このように，素粒子の関与する相互作用がすべて，ゲージ理論によって記述できる可能性は極めて高い．素粒子物理学者がこの認識に到達してから，相当の年月が立つが，翻って考えてみると，この理論では，4 次元で静的であると仮定される時空は素粒子の入れ物と見なされる．それに対し，一般相対性理論は動的な時空を考える．重力を除くと，場の量子論における発散の困難を避ける繰り込み理論は適用できるが，発散そのものがない理論を数学的に健全と呼ぶなら，点粒子を仮定するゲージ理論は数学的に健全な理論ではない．このような意味で，重力も含む健全な統一理論を探す試みは長い間続けられている．本書では，筆者の非力からしても，素粒子論のそのような根本的問題には一切触れることはできない．むしろ，本書は，従来の基本的仮定の上に立って，時空と素粒子の存在パターンについての，個人的な微々たる研究をまとめた凡書に過ぎない．その内容は，通常基本的な仮定として持ち込まれる，時空は $4=1+3$ (1 は時間，3 は空間) 次元であるという事実を，相対論的場の量子論における基本的な対称性である Lorentz 不変性は (実) 四元数で記述されるという仮定におき換えることができることを示す，様々な例証を並べることにある．時空と四元数との関係は，古

くから取り上げられてきたが，2 次の四元数行列を用いるという点で，虚時間座標を導入する従来のものとは方法論的に異なる．この点は特に強調しておきたい．

ここで言う例証とは，スピン 1/2 粒子を記述する Dirac 理論は 2 成分四元数スピノルを用いた定式化が可能であること，Poincaré ゲージ理論や簡単な (局所) 超対称モデルの四元数による記述ができること，クォーク・レプトンのレベルで見つかっている内部自由度《香り (flavor)・色 (color)》についてはそれぞれ四元数・八元数を用いた代数的アプローチが可能ではないかという (定性的) 予測に関するものである．

四元数・八元数が実数・複素数を一般化した数体系の中でも，特別の意味を持つことはあまねく知られている．そのような一般化の端緒をなした四元数が，19 世紀の偉大な数学者であり，物理学者である，William Rowan Hamilton により 1843 年に発見された非可換数であることは夙に有名である．しかしながら，四元数が有名なのは，数学史に新しいページを付け加えたその重要性とその発見にまつわるドラマチックな挿話もさることながら，その後の四元数の辿った浮き沈みにもある．現代ではやや盛り返した感のある，四元数の物理への応用研究の中でも，筆者にとっては，Dirac の 1945 年論文と，Kugo-Townsend の 1983 年論文から触発されるところが大であった．筆者はまた，四元数に続いて発見された八元数の物理への応用についての Günaydin-Gürsey の 1973-74 年論文により,《神秘的な数》八元数に魅了された一人である．

四元数の物理への応用 (の一部) を取り扱う本書は，ある意味で偏っているが，できるだけ一般性を持たせるよう腐心した．また，四元数を用いた計算過程は丁寧に説明したつもりである．さらに，添え字をできるだけ少なくするよう配慮した．内容は，大学院生・研究者向けにかかれているものの，学部 3・4 年生でも読める入門的な章も設けた．本書は全部で 8 つの章と 4 つの付録から構成されている．目次を見ていただければ，大体の内容は見当つくと思うが，以下，簡単にその構成を紹介する．

第 1 章は数の体系についてのおさらいである．後に必要になる代数用語を説明しながら，四元数と八元数の性質を詳しく述べるとともに，有名な Hurwitz の定理の証明を紹介する．Hurwitz の定理の証明まで含めた邦書はいまだない

ようである (訳本はあるが)．ただ，読む際にあまり時間を使わなくて済むように，後章で必要になる節は始めに断ってある．

第 2 章で，Lorentz 群の表現について必要最小限のことを，修士 1 年生に対して行った「場の量子論」の旧い講義ノートを主たるソースとしてまとめた．特に，そのスピノル表現 (Weyl 表現・Dirac 表現) は詳述した．また，Lorentz 群の有限次元非ユニタリ表現一般についても若干のスペースを取った．Poincaré 群のユニタリ表現は，有質量・零質量の場合に限って議論した．

第 3 章は場の量子論の入門に当てる．ここでも，主として,「場の量子論」の旧い講義ノートを基にした．第 4 章以降のことを考え，自由な Dirac 場の理論についてかなりの紙数を費やした．第 1・2・3 章は多くの洋・邦書のテーマになっていることの，ごく一部を復習したに過ぎない．

第 4 章から本書の主題に入る．まず，Lorentz 群を (2 次の) 四元数スピノル群と名付ける $Spin(2,\mathbb{H})$ にもとづいて議論する．次に，$Spin(2,\mathbb{H})$ に属する行列の対角化を通して，四元数とは可換な新しい虚数単位の存在を結論する．その結果，Lorentz 群や Dirac 方程式に対する伝統的な複素四元数アプローチが再現される．

第 5 章は，第 4 章の結果を用いて，四元数 Dirac 理論を述べる．この理論では荷電共役変換が古典論の段階で線形になる．それは，四元数 Dirac スピノルの行列表現は 4×2 行列になり，その第 1 列目を普通の 4 成分 Dirac スピノルと同定すれば，第 2 列目がその荷電共役スピノルに比例することに反映される．その結果，4 成分 Dirac スピノルの双 1 次形式は自動的に「反対称化」される．この「反対称化」は必要なときには手作業で行えるので，普通理論的に導く必要はないと考えられている．しかし，四元数 Dirac 理論ではエルミート性の要求によって決まるラグランジアンから自然に導かれる．

第 6・7・8 章は，異なる応用問題を取り扱う．第 6 章は，重力のゲージ理論である Poincaré ゲージ理論と超対称 Wess-Zumino 模型，および，4 次元単純超重力理論を四元数形式で議論する．この形式では，局所 Lorentz 系を指定する四脚場が，四元数四脚場にまとまるので，Poincaré ゲージ理論の局所ゲージ対称性が直積群で与えられることが明確にされる．これは，4 次元単純超重力理論における変分原理の簡単化をもたらす．この章では便宜上，第 5 章で得られ

た複素四元数を用い，また他の章とは独立に読めるようにした．

第 7 章は，四元数体上の 4 成分スピノル場として，四元数 Dirac 場を定義することにより，クォーク・レプトンが共通して持つ量子数《香り (flavor)》に拘わる，四元数体上のゲージ理論が構成できることを示す．その結果，もっともな仮定を設ければ，クォーク・レプトンの世代構造にもとづいた左右対称電弱理論にフィットするゲージ理論になることがわかる．

第 8 章は，Günaydin-Gürsey の先駆的な仕事 (1973-74) に始まる八元数のクォーク模型への応用に基づいて，強い相互作用の微視的理論である QCD (Quantumchromodynamics，量子色力学) を局所八元数の上で定義された八元数 Dirac 場の $SU(3)$ ゲージ理論として定式化する．この八元数 Dirac 場はクォークは担うが，レプトンは担わない量子数《色 (color)》に関係して，color トリプレットと color シングレットを同一の場で表現する．ただ，八元数は非結合型多元環なので，その上のゲージ理論が無矛盾かどうかはまだわかっていない．

付録 A では八元数の自己同型群 G_2 を Günaydin-Gürsey (1973) に基づき構成し，その Lie 代数 $\mathcal{G}_2$ の交換関係を導き，G_2 の部分群として，$SU(3)$ が含まれることが示される．付録 B は $Spin(2, \mathbb{H})$ に属する行列の性質をまとめ，付録 C は四元数 Dirac 方程式の解を運動量空間で求める．最後に，付録 D では，局所的に定義された八元数スプリット基底のゲージ不変微分を導く (その結果は第 8 章で使われる).

本書で用いる四元数の計算ルールは，一貫した記法に基づいているが，四元数計算に慣れないうちは，細かい計算は読み飛ばしてもいいように，本文中に小文字で計算過程を示した個所を多く設けた (四元数と無関係な第 2・3 章にもそのような個所が 1 つづつある)．各計算過程の終わりは，□ で印を付けたので，参考にしていただきたい．なお，各章末に注と参考文献を挙げた．用語の説明をする注が多くなったので，本書を読んでいく上で，既知の用語の説明にはあまり気を止めなくて済むように，最低限必要な注には注番号に * 印を付けた．例えば，*1) などのように．本文を読む上で，それだけは参考にして頂きたい．本書の性格上，参考文献の数も多くなった．特に，四元数・八元数の応用については，旧い文献を (少なくとも手元にあるものだけでも) 引用する方が科学史的な

観点からも，意味があるのではと思われたからである．引用の不十分な点はご容赦願いたい．また，索引中の人名は成書の著者・訳者および遺稿録・追悼録にある人たちに限った．引用論文の著者名は省略させて貰った．項目についての索引は，原則として，最初に現れたページ数のみを引用した．

この本を完成するに当たっては，筆者が名古屋大学理学部物理学教室に在職中，物理の議論を通して，多くの人から多岐にわたる助言と激励の言葉をいただき続けたことが，大きな励ましになった．特に，四元数と八元数を用いた代数的アプローチに関する筆者のささやかな研究に対し，いつも暖かいご理解を示して筆者を鼓舞してくださった，名古屋大学教授のち同大学名誉教授であられた故高林武彦先生には，謹んで感謝の意を表します．さらに，加瀬博巳大同大学名誉教授には，原稿を詳しく読んで頂き，計算のチェック・タイプミスの指摘を通して，厳しいコメントと非常に多くの貴重なご教示を受けた．そのお陰でブラッシュアップされた本書は初稿に較べ格段読みやすくなったものと思う．もちろん，本書にある如何なる間違いも筆者の責任であり，読者諸兄の寛容あるご叱責を賜りたい．同時に，奥村吉孝中部大学教授にも多大のご支援とご助力を頂いた．本書における，Lorentz 群の表現に関する第 2 章の記述，および，超対称モデルの四元数形式・4 次元単純超重力理論に対する四元数変分原理の応用を第 6 章に追加したことは，奥村教授から受けた刺激が直接的な動機になった．さらに，奥村教授には，TEX 原稿を作成する上で生じた様々な技術的問題においても，きわめて適切なご指導を受けた．加瀬名誉教授と奥村教授のご協力がなければ，本書は決して完成しなかったであろう．両博士に深くお礼申し上げます．

最後になりましたが，この本の出版にご尽力頂いた江沢 洋 学習院大学名誉教授に心からの謝意を表します．また，日本評論社の佐藤大器氏には，この本の出版について，並々ならぬご理解とご協力を得ました．ここに，厚くお礼申し上げます．

2011 年 7 月
森田　克貞

目 次

第 1 章

数の体系

この章では数の体系について簡単なおさらいをする．この問題は既に古典的な話題になっており，優れた解説本も，力点のおき方こそ違え，数多出版されている．にもかかわらず，ここであえて，実数・複素数の自然な一般化として得られる数の体系に，非可換な四元数と非可換・非結合的な八元数が存在するという周知の事実を述べるのは，この本の主旨にもかなっていると考えるからである．若干の代数用語は第 1 節で概略的説明をするが，他のものに関しては必要に応じて行う．ただ，第 4 章以降で使用する記号や計算規則の説明は第 1, 3, 4, 5 節だけであることを予めお断りしておく．なお，第 6 節で，実数体上の単位元を持つ組成代数は，実数，複素数，四元数と八元数に限られることを述べる Hurwitz の定理の証明の 1 つを紹介する．また，第 7 節で，Cayley-Dickson 2 重化法に従って構成される一般な超複素数系を概観する．入門的記述とはいえ，関連する数学の論文・専門書も章末に引用する．

1.1 実数と複素数

実数は四則演算・大小関係を持つ，連続 (あるいは完備) な数体系であることは改めて述べるまでもない．ただ，この章で必要とする代数概念は，実数の集合の性質を抽象化・一般化することにより導かれるので，既知のことではあっても，始めに，実数の集合 $\mathbb{R}$ の持つ性質を次のように整理しておく．

すべての実数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，

1. 加法 $x + y \in \mathbb{R}$ が一意に定義されて交換の法則および結合の法則が成り立つ．即ち，

$$x + y = y + x \qquad \text{(交換の法則)} \qquad (1.1a)$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{(結合の法則)} \tag{1.1b}$$

すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x+0=x$ を満たす $0 \in \mathbb{R}$ が存在する　(1.1c)

すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $x+(-x)=0$ を満たす $-x \in \mathbb{R}$ が存在する　(1.1d)

この場合，0 を**加法に関する単位元** (**零元**)，$-x$ を x の**加法に関する逆元**という．

2. 乗法 $xy \in \mathbb{R}$ が一意に定義されて，交換の法則と結合の法則および分配の法則を満たす．

即ち，

$$xy = yx \qquad \text{(交換の法則)} \tag{1.2a}$$

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{(結合の法則)} \tag{1.2b}$$

$$x(y+z) = xy+xz,\ (x+y)z = xz+yz \qquad \text{(分配の法則)} \tag{1.2c}$$

すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $1x = x1 = x$ を満たす $1 \in \mathbb{R}$ が存在する　(1.2d)

すべての $x \in \mathbb{R}^*$ に対して $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$ を満たす $x^{-1} \in \mathbb{R}^*$ が存在する
(1.2e)

ここで，$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ は 0 を除くすべての実数の集合を表す．この場合，1 を**乗法に関する単位元**，x^{-1} を $x \neq 0$ の**乗法に関する逆元**という．

これらの事実のうち，性質 1. をもって，$\mathbb{R}$ は加群をなすという．また，性質 2. の中の分配則 (1.2c) を除いたものでもって，$\mathbb{R}^*$ は積に関して可換な乗法群をなすという．さらに分配則 (1.2c) をも併せ持つことから，$\mathbb{R}$ は体をなすという．これを実数体という．そこで，実数の集合を一般化・抽象化した集合に対して，性質 1. や性質 2. あるいはそれらの中の修正された付加的事項を要請することにより，代数学の基本的な概念である群とか環・体などを定義することにしよう[1)]．

一般に集合 G が**群**をなすとは，G の任意の 2 元 x, y に対して，加法と呼ばれる 2 項演算 $x+y \in G$ または乗法と呼ばれる 2 項演算 $xy \in G$ が定義されて，$\mathbb{R}$ を G とおき換えた上の条件 (1.1) または，乗法を $\mathbb{R}^*$ に制限した上で，$\mathbb{R}^* \to G$ とおき換えた (1.2b,d,e) が成り立つときをいう．2 項演算が加法のときは**加群**といい，乗法のときは**乗法群**という言葉も使う．上で述べたように，$\mathbb{R}$ は加群をなすが，普通，群といえば，単に乗法群のことを指す．2 項演算に関し

て，交換の法則が成り立つ群を**可換群** または **Abel 群** という．だから，加群は Abel 群である．しかし，積に関しては一般に交換の法則 (1.2a) がなり立つときと，成り立たないときがある．積が非可換の場合，G を**非可換群** または**非 Abel 群** という．H が G の**部分群** とは，H が G の積に関して群を作るときをいい，その必要十分条件は $h, h' \in H$ ならば必ず $h^{-1}h' \in H$ が成り立つことである．

また，G の任意の元 g に対して $gNg^{-1} \subset N$ ならば，N を G の**不変部分群** (または**正規部分群**) という．群 G が如何なる正規部分群も含まないとき，G を**単純群**という．G が可換な正規部分群を含まない場合に，G を**半単純群**という．

いま，群 G が 2 つの交換する部分群 G_1, G_2 (単位元のみからなる部分群は除く) を持ち，G の任意の元は一意的に $g = g_1 g_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ とかけるとき，G を G_1 と G_2 の**直積**といい，$G = G_1 \times G_2$ とかく．明らかに，この場合，G の元の積は $gg' = (g_1 g_2)(g_1' g_2') = (g_1 g_1')(g_2 g_2')$ で与えられ，G_1, G_2 はともに G の正規部分群である．もし，G_1 は G の正規部分群であるが，G_2 は G の部分群で G_1 との共通集合は単位元のみ，かつ G の任意の元は一意的に $g = g_1 g_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ とかけるとき，G は G_1 と G_2 の**半直積** という．この場合，G の元の積は $gg' = (g_1 g_2)(g_1' g_2') = (g_1(g_2 g_1' g_2^{-1}))(g_2 g_2')$ で与えられる ($g_2 g_1' g_2^{-1} \in G_1$ に注意) [2)]．

G, G' を (乗法) 群とする．G から G' への写像 $f : G \to G'$ で，任意の $g, g' \in G$ に対して，$f(gg') = f(g)f(g')$ が成り立つとき，f を**準同型写像**という．準同型写像 f が全射のとき，則ち上への 1:1 写像のときは**同型写像**という．同型写像 $f : G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**同型**であるといい，$G \cong G'$ とかく．位相空間として同型 (この場合は 2 点間の近さが定義されているので，f も f^{-1} も連続) のときにも同じ記号 $\cong$ を使う．

加群 K に乗法が定義され，積に関して上の性質 (1.2b,c) が成り立つとき，**環**と呼ぶが，さらに，(1.2d) で特徴づけられる単位元を持つ場合は，**単位元を持つ環**という．単位元を持つ環が，ゼロと異なる元に対して逆元を持つとき，**体**と呼ぶ．とくに，積が交換の法則を満たす場合は**可換体**，満たさない場合は**非可換体** (あるいは**斜体**) という．それ故，既に述べたように $\mathbb{R}$ は可換体である．

いま，V を加群とし，その元を u, v とかく．実数 α との積 $\alpha u \in V$ が一意に定義され，

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{1.3a}$$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{1.3b}$$

$$1u = u, \quad 1 \in \mathbb{R} \tag{1.3c}$$

が成り立つとき，V を $\mathbb{R}$ 上の **(実) ベクトル空間**と言い，V の元を**ベクトル**という．V の**部分空間** W とは，W がベクトル空間であって，$u, v \in W$ に対して $u+v \in W, \alpha u \in W$ が成り立つときを言い，$W \subset V$ とかく．V の部分空間 W_1, W_2 があって，それらには共通の元がないとき，$V = W_1 + W_2$ は W_1, W_2 の直和である，あるいは V は W_1, W_2 の直和に分解される (直和分解) という．V の元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に対して，

$$u_1e_1 + \cdots + u_ne_n = 0, \quad u_1, u_2, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$$

が成り立つのは，$u_1 = \cdots = u_n = 0$ のときに限るとき，ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は 1 次独立であるという．V の中の 1 次独立なベクトルが n $(<\infty)$ 個存在し，かつそれ以上存在しないとき，n を V の次元といい，$\dim V = n$ とかく．1 次独立なベクトルの個数が任意に多いとき，V は無限次元であるという．いま，$\dim V = n < \infty$ とする．V の任意の元 u が一意に

$$u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n, \quad u_1, u_2, \cdots, u_n \in \mathbb{R}$$

とかける 1 次独立なベクトルの組 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ を V の**基底**という．また，$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ をベクトル u のその基底に関する成分という．基底の取り方は無数にあるが，その個数は一定で考えているベクトル空間の次元数 n に等しい．

有限次元のベクトル空間 V の**スカラー積** (または**内積**) とは，任意の元 u, v にたいし定義される実数 $\langle u, v\rangle$ で，条件

$$\langle u, u\rangle \geqq 0, \qquad \text{(等号が成り立つのは } u=0 \text{ の場合のみ)} \tag{1.4a}$$

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \qquad \text{(対称性)} \tag{1.4b}$$

$$\langle (u+u'), v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle, \quad \text{(線形性)} \tag{1.4c}$$

$$\alpha\langle u, v\rangle = \langle \alpha u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.4d}$$

を満たすものを言う．(1.4b,c) から，$\langle u, (v+v')\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle$ が得られる．$\langle u, v\rangle = 0$ を満たすベクトル u, v は**直交する**という．また，スカラー積 $\langle u, v\rangle$ は

非退化である，すなわち，すべての $v \in V$ に対し $\langle u, v \rangle = 0$ ならば，$u = 0$ となる．2 つのベクトル $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$, $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$ に対して，

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{1.4e}$$

となるのは，

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.4f}$$

のときである．ただし，δ_{ij} は Kronecker の記号で，$i = j$ のときには 1, $i \neq j$ のときにはゼロの値を取る．この条件を満たす基底を**正規直交基底**という．例えば，n 次元数ベクトル空間に上のようなスカラー積にもとづいて，$u, v \in V$ 間の長さが

$$|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

で定義された距離空間が n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ である (u, v を $\mathbb{R}^n$ の点と呼ぶ)．仮定から，$\langle u, u \rangle \geqq 0$ なので，ベクトル u のノルム $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ が定義され，この章で考えるベクトル空間はこのような**正定値計量**を持つベクトル空間である．正規直交基底が，(1.4f) と違って，条件 $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ ($i \neq j$), $|\langle e_i, e_i \rangle| = 1$ を満たすが，すべての i に対して，$\langle e_i, e_i \rangle$ は同符号ではないときは，$\langle u, u \rangle \leqq 0$ を満たすゼロでないベクトルが存在する．これを，$V = \mathbb{R}^n$ 上で定義された，**不定計量**を持つベクトル空間という．このときも，スカラー積は非退化である．例えば，$i = 1, 2, \cdots, p$ に対しては，$\langle e_i, e_i \rangle = -1$，$i = p + 1, p + 2, \cdots, p + q = n$ に対しては，$\langle e_i, e_i \rangle = 1$ の場合の不定計量ベクトル空間を擬ユークリッド空間といい，この本では $\mathbb{R}^{p,q}$ とかくことにする．この (p, q) を**符号数**といい，一般に，$V = \mathbb{R}^n$ 上で定義される 2 次形式をきめる対称行列によって一意的に決まることが証明されている (一般には，$p + q$ はこの対称行列の階数に等しい．いま，この対称行列の階数 $= n$ の場合を考えているので，$p + q = n$ が成り立つ．その場合の 2 次形式を非退化という)．特に，$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{0,4}$ である．次章以降では，不定計量を持つ計量空間も考える．

ベクトル空間 V 上の正則な (つまり逆が存在する) 1 次変換全体は群を作る．これを $GL(V)$ とかく．群 G から $GL(V)$ への連続な準同型写像 ρ，すなわち，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ を満たすものを，G の V 上

の表現といい，(ρ, V) とかく．V の部分空間 W で G の作用のもとで不変である，すなわち，$\rho(G)W \subset W$ を満たすものは $W = 0$ か $W = V$ に限るとき，表現 (ρ, V) は**既約** という．既約でないときは**可約**であると言う．群 G の 2 つの表現 $(\rho_1, V), (\rho_2, V)$ が**同値** とは，V 上の正則な 1 次変換 S が存在して，すべての $g \in G$ に対して，$\rho_2(g) = S\rho_1(g)S^{-1}$ が成り立つことを言う．

$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathcal{A}$ に 2 項演算 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$：$(a, b) \to ab \in \mathcal{A}$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$ が定義され，α, β を任意の実数として，$\forall a, b, c \in \mathcal{A}$ にたいし，$\mathcal{A}$ が条件

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha(ab) + \beta(ac)$$

$$(\alpha b + \beta c)a = \alpha(ba) + \beta(ca)$$

$$1a = a1 = a, \quad 1 \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

を満たすとき，$\mathcal{A}$ を **$\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ多元環**であるという [3)]．

あるベクトル空間 V の必ずしも正則とは限らないすべての 1 次変換の集合 $\mathrm{End}(V)$ は V から V への自己準同型といわれる多元環をなす．多元環 $\mathcal{A}$ から $\mathrm{End}(V)$ への準同型写像 ρ とは任意の $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ に対して $\rho(a_1 a_2) = \rho(a_1)\rho(a_2)$ とともに $\rho(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 \rho(a_1) + \alpha_2 \rho(a_2)$ も満たすものをいう (ただし，実ベクトル空間のときは $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$ とする)．これを多元環 **$\mathcal{A}$ の表現**という．この表現が**既約**であるとは，群の表現のときと同じく，不変部分空間が 0 か表現空間に一致するもの以外は存在しないときを言う．そうでないときは，**可約**という．群の場合と同じように，**同値**な表現という言葉を使う．

$\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の部分空間で，$\mathcal{B}$ の元は積に関して閉じているとき，すなわち，$a, b \in \mathcal{B}$ ならば $ab \in \mathcal{B}$ が成り立つとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の部分多元環と呼び，$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ とかく．$\mathcal{A}$ が条件

$$(ab)c = a(bc), \quad a, b, c \in \mathcal{A} \qquad \text{(結合則)} \tag{1.6}$$

を満たすときは，**$\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ結合的多元環**という．明らかに，$\mathbb{R}$ は単位元を持つ $\mathbb{R}$ 上の可換な結合的多元環である．すべての元の組み合わせに対して結合則 (1.6) は成り立たないが，2 つの元しか現れない場合には結合則が

$$a(ab) = (aa)b, \quad a(bb) = (ab)b, \quad a(ba) = (ab)a, \quad a, b \in \mathcal{A} \quad (\text{交代性}) \tag{1.7}$$

のように成り立つ $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ **上の単位元を持つ交代的多元環**という[4]．明らかに，多元環 $\mathcal{A}$ が結合的ならば，必ず交代的でもある．以下，単位元を持つ多元環のみを考える

なお，実数 x に対してその絶対値 $|x| \geqq 0$ が $x > 0$ のときは $|x| = x$, $x < 0$ のときは $|x| = -x$ で定義され，関係式 $|xy| = |x||y|$ を満たす．

いま，$\mathbb{R}$ 上の単位元をもつ多元環 $\mathcal{A}$ が正定値計量のベクトル空間で (従って，非退化なスカラー積を持ち)，ノルムが $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ で与えられているとする．このノルムが次の**組成法則**

$$|ab| = |a||b|, \quad a, b \in \mathcal{A} \tag{1.8}$$

を満たすとき，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ 上の**組成代数**（あるいは**ノルム多元環**）という[5]．上の組成法則はスカラー積を使って，

$$\langle ab, ab \rangle = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle, \quad a, b \in \mathcal{A} \tag{1.9}$$

ともかける．1.6 節で，この組成法則と単位元の存在から，交代性 (1.7) を導く．自明な例であるが，もちろん，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の組成代数である．

この章で述べる数の体系とは，実数の場合に上で述べた演算規則や集合の性質を (場合によっては，乗法の可換性や結合性を犠牲にして）満足するように，実数を一般化したものである．その中で，最も簡単で扱いやすいものが，複素数である．

複素数 z は実数 x, y を用いて

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

とかかれる．ただし，虚数単位と呼ばれる $i = \sqrt{-1}$ は実数と可換で，自乗すると -1 になる：$i^2 = -1$．複素数 z の実部 x を $x = \mathrm{Re}\, z$，虚部 y を $y = \mathrm{Im}\, z$ とかく．$y \in \mathbb{R}$ に対して，iy の形の複素数を純虚数と呼ぶ．複素数の集合を $\mathbb{C}$ として，(1.10) を

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \tag{1.11}$$

とかく．これは $\mathbb{C}$ の部分空間としての $\mathbb{R}$ と $i\mathbb{R}$ は互いに直交することを意味す

る．その直交性を保証するには $\mathbb{C}$ にスカラー積を定義する必要がある．このスカラー積は，下の (1.15) によって定義される．

複素数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ の相等,（可換な）和・積を次のように定義する．

$$z_1 = z_2 \longleftrightarrow x_1 = x_2 \ \text{かつ}\ y_1 = y_2$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_2 y_1) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.12}$$

積に対する公式は分配の法則と i が実数と可換で $i^2 = -1$ となることを使えば導ける．従って，分配の法則は仮定されている．$\mathbb{C}$ は $z + 0 = z$ を満たす $0 \equiv 0 + i0$ を加法の単位元として加群をなす．また，$1z = z1 = z$ を満たす $1 \equiv 1 + i0$ を乗法の単位元として，$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ は可換な乗法群をなす．$\mathbb{C}$ はさらに分配則 (1.2c) を満たすので，可換体である．これを複素数体という．実数は $x = x + i0$ と同定するので，$\mathbb{R}$ は複素数体の部分体である ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)．明らかに α を実数として，$\alpha(z_1 z_2) = (\alpha z_1) z_2 = z_1(\alpha z_2)$ が成り立つから，複素数体 $\mathbb{C}$ はまた $\mathbb{R}$ 上の単位元をもつ可換な多元環でもある．なお，(実) ベクトル空間と同様，$\mathbb{C}$ 上の **(複素) ベクトル空間**，その部分空間，直和分解も考えられる．

複素数 $z = x + iy$ の**複素共役**を

$$\overline{z} = x - iy \tag{1.13}$$

で定義すれば，(1.12) の積の定義を使って，$|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2$ を得る．従って，

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.14a}$$

が成り立つ．これは恒等式

$$(x_1 x_2 - y_2 y_1)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \tag{1.14b}$$

から導ける．従って，$\mathbb{C}$ は $|z|$ をノルムとして持つ $\mathbb{R}$ 上の組成代数である．また，$\mathbb{C}$ はスカラー積

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{1.15}$$

を持つ，$\mathbb{R}$ 上の 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ である．明らかに，ノルムの自乗は

$$|z|^2 = \langle z, z \rangle = x^2 + y^2 \tag{1.16}$$

で与えられる．(1.11) 下で触れたように，$\mathbb{C}$ のスカラー積 (1.15) は $\langle x, iy \rangle = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ を意味するから，確かに $\mathbb{C}$ の部分空間としての $\mathbb{R}$ と $i\mathbb{R}$ は互いに直交することがわかる．

複素数 $z = x + iy$ に対する異なる表示法に Hamilton の表記法がある．既に確立していた複素数の標準的な表示法や幾何学的解釈に代数的観点から疑問を抱いていた Hamilton は複素数を実数の組 x, y を用いて順序対 (x, y) の形に表した (2 元数)．その相等・和・積は次のように定義される．

$$(x, y) = (x', y') \longleftrightarrow x = x' \text{ かつ } y = y'$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_1 x_2 - y_2 y_1, x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.17}$$

この場合，実数は $x \equiv (x, 0)$ である．それに対し，虚数単位は $i \equiv (0, 1)$ である (従って，$(x, y) = x + iy$)．i が虚数単位であることは実数の掛け算のみを用いて計算できる：$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$．さらに，実数と虚数単位は交換する．即ち，$xi = (x, 0)(0, 1) = (0, x) = (0, 1)(x, 0) = ix$ が成り立つ．複素数 (x, y) の複素共役は

$$\overline{(x, y)} = (\overline{x}, -y) = (x, -y) \tag{1.18}$$

である．ただし，実数に対しては，$\overline{x} = x$ である．

このような記法は，平面幾何と複素数の関係を一般化して，3 元数 (x, y, z) や 4 元数 (x, y, z, w) など，一般に n 元数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考える強い動機を与える．事実，Hamilton は古典代数学の範疇では空間幾何と 3 元数の望ましい関係は得られないことから，非可換な 4 元数を発見した．これは，近代代数学の発展に重要な足跡を標したもので，Lobachevsky の非ユークリッド幾何学の発見と並び称される (前者は数の可換性を，後者は平行線の公理を否定した，矛盾のない数学的体系)．その後，J. T. Graves, A. Cayley によって，8 元数も見出された．4 元数，8 元数は (1.14) を一般化した式を満たす．これをさらに一般化して，**平方和の問題**，即ち，

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) \tag{1.19}$$

(ただし，$c_i(a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ は a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の双一次形式) はどのような n に対して可能かという問題に最終決着をつけ，n 元数が $\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ組成代数として存在するのは，$n = 1, 2, 4, 8$ に限られることを証明したのは，Hurwitz である[6)]．代数学上のこの美しい定理の証明はこの章の 6 節で紹介するが，次節では，とりあえず，3 元数 (x, y, z) が存在しないことの初等的証明を述べる．

1.2　3 元数が存在しないこと

複素数を Hamilton の記法に従って，(x, y) とかくと，これは平面ベクトルに対応する 2 元数である．その長さの自乗は $x^2 + y^2$ であった．それに対し，3 次元空間ベクトルは (x, y, z) となり，その長さの自乗は $x^2 + y^2 + z^2$ である．2 元数の積がまた 2 元数であったのと同様に，3 元数の積も 3 元数であるという，2 元数 (x, y) と同じような (組成法則も含む) 演算規則が 3 元数 (x, y, z) には当てはまらない．その結果，積の可換性を犠牲にすることにより，Hamilton が非可換な 4 元数に到達したことはあまりにも有名である[7)]．本書では，次節で 4 元数の代数的性質や計算規則を説明するにとどめる．その前に，この節で，3 元数が存在しないことを示す 2 通りの方法，一つは数論的方法，他の一つは代数的方法を紹介する．

複素数の一般化である 3 元数が存在するとして，仮にその演算規則が打ち立てられたとしよう．それが，なお，晴れて数の体系の一員になるには，何よりも組成法則

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

が成り立っている必要がある．ところが，Legendre は既に 19 世紀初頭，次のことを指摘していた[8)]．いま，n をゼロまたは正の整数として，偶数の自乗は，すべて $4n$ の形であり，奇数の自乗は，すべて $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 8k(k+1)/2 + 1 = 8n + 1$ の形であることに注意する．従って，3 つの自乗和は，それが奇数であれば，$4n + 1$ かまたは $8n + 3$ の何れかの形をとる．それ故，$8n + 7$ という形の奇数は決して 3 つの自乗和にかけない．例として Legendre があげているのは

$$3 \cdot 21 = (1+1+1)(16+4+1) = 63$$

で，$63 = 8 \cdot 7 + 7$ は決して 3 つの自乗和にかけない．つまり，3 元数に対する組成法則は破れていることが Hamilton 以前に既に認識されていたのである．van der Waerden はこのような歴史に言及した上，いみじくも次のように語っている.「Hamilton が Legendre によるこの注意を知っていたなら，おそらく彼は 3 元数を掛けるという研究を諦めたであろう．幸い，彼は，Legendre を読んでいなかった．即ち，彼は独学者であったのだ.」

今ひとつのよく知られた，3 元数の不可能性の代数的証明は次のようである[9)]．3 元数を $(x, y, z) = x + yi + zj$ とかく．このとき，実数の x, y, z は $x = (x, 0, 0)$ などとかかれ，$i = (0, 1, 0), j = (0, 0, 1)$ とおいた．i, j は自乗すれば $-1 \equiv (-1, 0, 0)$ になる数で，実数とは可換とする．この 3 元数を自乗すれば，ij や ji が出てくる．いま，ij は再び 3 元数として，適当な実数 x, y, z を用いて

$$ij = x + yi + zj$$

とかけたとしよう[10)]．この式に左から i を掛けて，分配の法則と実数と虚数の交換の法則および結合の法則が成り立つものとすれば，

$$zx - y + (x + yz)i + (z^2 + 1)j = 0$$

を得る．$0 \equiv (0, 0, 0) = 0 + 0i + 0j$ だから，この式は z が実数である限り成り立たない．いずれの理由にしても， 3 元数は存在しない．つまり，複素数 (x, y) は古典的な代数の範疇では 3 元数 (x, y, z) に拡張できないのだ．

次節では，Hamilton が発見した 4 元数 (x, y, z, w) を説明する．ただし，記号は第 4 章以降に適切なものに改める．また，今後，4 元数や 8 元数を四元数，八元数と記す．

1.3 四元数

四元数を表す実数の 4 つ組を $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \equiv (q_0, \boldsymbol{q})$ と記そう．ここで， q_0 を q のスカラー部分，3 次元のベクトル記号 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ を用いた成分をベクトル部分と呼ぶ．実数 α との積は $\alpha q = (\alpha q_0, \alpha q_1, \alpha q_2, \alpha q_3) = (q_0 \alpha, q_1 \alpha, q_2 \alpha, q_3 \alpha) = q\alpha$ と定義する． 四元数の単位元を $e_0 = (1, 0, 0, 0) \equiv$

1 とおく．2 元数 (複素数) の場合の虚数は $(0,1)$ と一つであったのに対し，四元数は三つの **Hamilton の虚数単位** $e_1=(0,1,0,0), e_2=(0,0,1,0), e_3=(0,0,0,1)$ を持つ．その名の通り，それらは自乗して $-1\equiv(-1,0,0,0)$ になる．これらを合わせた $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ を**四元数の基底**と呼ぶ．四元数のベクトル部分は純虚数なので，四元数 $q=(q_0,q_1,q_2,q_3)$ の共役を

$$\overline{q}=(q_0,-q_1,-q_2,-q_3) \tag{1.20}$$

で定義する．すると明らかに $\overline{\overline{q}}=q$．四元数の基底 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ を用いて，任意の四元数 q は

$$q=q_0e_0+q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3\equiv q_\mu e_\mu=e_\mu q_\mu,\ \ q_\mu\in\mathbb{R}\ \ (\mu=0,1,2,3) \tag{1.21}$$

と表される．以下，繰り返された添字については，和の記号 Σ を省略して，添字の取り得る値にわたって和をとるという **Einstein の規約**を採用する (このような 1 対の添字をダミー添字という．正定値計量を持つベクトル空間を考える場合はすべて下付の添字しか出てこないが，不定計量を用いる第 2 章以降では上付と下付を区別する．ただし，その場合でも，正定値計量を持つ部分空間については添字の上下を区別しない場合がある)．ダミー添字の取り得る値の範囲が明確な場合はその範囲を省略する．ギリシャ文字 $\mu,\nu,\cdots$ は 0, 1, 2, 3 の値，ラテン文字 i,j,k,l,m は 1,2,3 の値を取る (この約束は第 6 章を除いてすべての章にわたる．一般相対論を取り扱う第 6 章ではラテン文字も 0,1,2,3 の値を取る．従ってその章ではギリシャ添字もラテン添字も必ず上下の区別がある)．四元数 q,p の和

$$\begin{aligned} q+p=p+q&=(q_0+p_0,q_1+p_1,q_2+p_2,q_3+p_3)\\ &=(q_\mu+p_\mu)e_\mu,\quad q_\mu,p_\mu\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.22}$$

は明らかに交換の法則と結合の法則を満たす．加法の単位元は $0\equiv(0,0,0,0)$ で，四元数の集合 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．従って，2 つの四元数 $q=(q_0,q_1,q_2,q_3), p=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ のスカラー積を

$$\langle q,p\rangle=q_0p_0+q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3 \tag{1.23}$$

で定義すれば，四元数の集合 $\mathbb{H}$ は 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ になる．この場合，基底 $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ は $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底である．なお，$\langle q,1\rangle=q_0$ だか

ら $\overline{q} = 2\langle q, 1\rangle - q$ ともかける．

単位元 e_0 と Hamilton の虚数単位は次の関係式を満足すると仮定する．

$$\begin{cases} e_0 e_0 = e_0 \\ e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \ (i = 1, 2, 3) \\ e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k, \ (i, j, k = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{1.24a}$$

3 次元の Levi-Civita シンボル ε_{ijk} は，添字に関して完全反対称で，$\varepsilon_{123} = 1$ と選ぶ．それ故，Hamilton の虚数単位は交換関係

$$[e_i, e_j] \equiv e_i e_j - e_j e_i = 2\varepsilon_{ijk} e_k \tag{1.24b}$$

を満たすので Lie 代数を張り，反交換関係

$$\{e_i, e_j\} \equiv e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} \tag{1.24c}$$

も満たすので 4 次元の Clifford 代数でもある (生成元は $1 = e_0, e_1, e_2$ の 3 つ，基底は $1 = e_0, e_1, e_2, e_1 e_2$ の 4 つ)[11)]．このため四元数の既約表現は 2 次元に限られる ((1.40) 参照)．上記 Hamilton の基底の間の積 (これを**乗積表**という) は次頁の表にまとめた．四元数 q, p の積は (1.24a) から

$$qp = (q_0 p_0 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}) + (q_0 \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} p_0 + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{e} \tag{1.25}$$

で与えられる．ただし，$\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ とおいた．この式を含め，以下，乗法の単位元 e_0 はあらわにかく場合もあれば，省略する場合もある．そのようにしても混乱は招くまい．四元数の積が分配の法則を満たすことは実数のそれから導けるが，重要な点は，それが一般に交換の法則を満たさないことである．

$$qp \neq pq, \quad q, p \in \mathbb{H} \tag{1.26}$$

(ただし，q または p あるいは両方とも単位元に比例する場合は定義により，等号が成り立つ)．この非可換性は， Hamilton の虚数単位の反可換性 $e_i e_j = -e_j e_i \ (i \neq j)$ に起因するが，qp の式 (1.25) において，3 次元ベクトルの内積は 2 つの因子の交換に関して対称であるのに対し，ベクトル積は符号を変えることに注意すればよい．この非可換性が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ と本質的に違うところである．しかし結合の法則は満たす．

$$(qp)r = q(pr), \quad q, p, r \in \mathbb{H} \tag{1.27a}$$

表 1　Hamilton の基底 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ の乗積表．第 1 列掛ける第 1 行の結果を表す．

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

これはいろいろな方法で証明できる．例えば，(1.27a) の成り立つことを見るには，Hamilton の虚数単位 $\{e_i\}$ に対して

$$(e_i e_j)e_k = e_i(e_j e_k) \tag{1.27b}$$

を証明すれば十分である．ところがこれは，(1.24) によって，

$$(-\delta_{ij} + \varepsilon_{ijl}e_l)e_k = e_i(-\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl}e_l) \tag{1.27c}$$

に等しい．この式で再び (1.24) を用いると，

$$-\delta_{ij}e_k + \varepsilon_{ijl}(-\delta_{lk} + \varepsilon_{lkm}e_m) = -e_i\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl}(-\delta_{il} + \varepsilon_{ilm}e_m) \tag{1.27d}$$

が得られる．両辺にある $-\varepsilon_{ijk}$ は互いに相殺する．残りの項も，Levi-Civita シンボルの満たす恒等式

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{lkm} = \delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk} \tag{1.27e}$$

を用いれば互いに相殺することがわかる．従って，結合則 (1.27a) が証明された．さらに，乗法の単位元 e_0 を持つので，$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$ は上の積に関して非可換な乗法群をなす (ゼロでない四元数の逆元の存在については後程触れる)．その結果，四元数の集合 $\mathbb{H}$ は斜体（あるいは非可換体）をなす．さらに，実数の α に対して，$\alpha(qp) = (\alpha q)p = q(\alpha p)$ が成り立つので，四元数体 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ多元環である．

$q = q_\mu e_\mu$ の共役元 (1.20) は

$$\overline{q} = q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3 \equiv q_\mu\overline{e}_\mu, \qquad \overline{e}_0 = e_0, \qquad \overline{\boldsymbol{e}} = -\overline{\boldsymbol{e}} \tag{1.28}$$

となり，ノルムの自乗

$$|q|^2 \equiv q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{1.29}$$

は 4 次元ベクトル $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ の長さの自乗である．すると，恒等式[12)]

$$\begin{aligned}
&(q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3)^2 + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)^2\\
&+ (q_0p_2 + q_2p_0 + q_3p_1 - q_1p_3)^2 + (q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1)^2\\
&= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)
\end{aligned}$$

から組成法則

$$|qp| = |q||p| \tag{1.30}$$

が得られる．従って，$\mathbb{H}$ は実数体上の単位元を持つ組成代数である．ところで

$$\overline{qp} = (q_0p_0 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}) - (q_0\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}p_0 + \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{e}$$

$$\bar{p}\,\bar{q} = (p_0q_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) - (p_0\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}q_0 + \boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{e}$$

は互いに等しいから，一般に，

$$\overline{qp} = \bar{p}\,\bar{q} \tag{1.31}$$

が成り立つ．ゆえに，共役 $q \to \bar{q}$ は**対合** (involution) である (明らかに $\bar{\bar{q}} = q$ で $q \to \bar{q}$ は線形だから)．共役元のこの性質と積の結合法則を使うと，実数は四元数と可換なので，組成法則 (1.30) は直ちに得られる．

$$|qp|^2 = (qp)\overline{qp} = (qp)(\bar{p}\bar{q}) = q(p\bar{p})\bar{q} = q\bar{q}|p|^2 = |q|^2|p|^2$$

四元数のスカラー積 (1.23) は共役元を用いて

$$\langle q, p\rangle = \frac{1}{2}(\overline{q}p + \overline{p}q), \quad q, p \in \mathbb{H} \tag{1.32}$$

とかける．$\langle q, p\rangle = 0$ なる 2 つの四元数は直交するという．さらに，ノルムの自乗 (1.29) は非負なので，ゼロでない四元数の逆が $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ で与えられ，$(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$ が成り立つ．それ故，ゼロでない $q \in \mathbb{H}$ に対する方程式 $qx = p, yq = p$ $(p, x, y \in \mathbb{H})$ は左からまたは右から q^{-1} をかけて，一意的な解を持つことが示せる．つまり，$\mathbb{H}$ は $\mathbb{R}$ 上の可除多元環である．

四元数のスカラー部分，ベクトル部分は，別の記号でもかかれ，第 4 章以降

ではその記号を使う．つまり，

$$\mathrm{Re}\,[\,q\,] = \frac{1}{2}(q+\bar{q}) = \mathrm{Re}\,[\,\bar{q}\,] = q_0 e_0 \equiv q_0$$
$$\mathrm{Im}\,[\,q\,] = \frac{1}{2}(q-\bar{q}) = -\mathrm{Im}\,[\,\bar{q}\,] = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e} \tag{1.33}$$

をそれぞれ四元数 q の実部，虚部と呼び，実部に関しては，

$$\mathrm{Re}[\,q\,p\,] = \mathrm{Re}[\,p\,q\,], \quad p, q \in \mathbb{H} \tag{1.34}$$

が成り立つ．従って，$\mathrm{Re}[\,q\,p\cdots]$ においては，$[\cdots]$ 内の因子を循環的に置換してよい．

$\bar{q} = -q$ を満足する四元数を**純四元数**と呼び，その集合を $\mathbb{H}_0$ と記す．

$$\mathbb{H}_0 = \{q \in \mathbb{H};\ \bar{q} = -q\}$$

任意の四元数は 2 つの純四元数の積で与えられる．なぜなら，

$$q = uv = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}) = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}, \quad u, v \in \mathbb{H}_0$$

において，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は任意に選べるからである．

また，ノルムが 1 の四元数を**単位四元数**と呼ぶ．その乗法群は $Sp(1) \cong SU(2)$ である．

$$SL(1,\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H};\ |q| = 1\} \cong Sp(1) \cong SU(2) \tag{1.35}$$

それ故，単位四元数の集合は S^3 と同相である (つまり同相写像が存在する)．

任意の四元数 (1.21) およびそのノルムの自乗 (1.29) は次のようにもかける．

$$q = e_0\mathcal{Q}_1 + e_2\mathcal{Q}_2 = e_0\mathcal{Q}_1 + \overline{\mathcal{Q}_2}e_2 \tag{1.36a}$$

$$\mathcal{Q}_1 = q_0 + q_3e_3, \quad \mathcal{Q}_2 = q_2 + q_1e_3, \quad \overline{\mathcal{Q}_2} = q_2 - q_1e_3 \tag{1.36b}$$

$$|q|^2 = |\mathcal{Q}_1|^2 + |\mathcal{Q}_2|^2 \tag{1.36c}$$

これを四元数の**シンプレクティック表示**と呼び，$\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ はその**シンプレクティック成分**と言われる．このとき，$e_0\mathcal{Q}_1 \equiv \mathcal{Q}_1$ と $e_2\mathcal{Q}_2$ は互いに直交する．即ち

$$\langle\mathcal{Q}_1, e_2\mathcal{Q}_2\rangle = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{Q}_1}(e_2\mathcal{Q}_2) + (\overline{e_2\mathcal{Q}_2})\mathcal{Q}_1) = \frac{1}{2}e_2(\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_1) = 0 \tag{1.36d}$$

が複素数の積の可換性から導かれる．$\mathcal{P}_{1,2}$ を四元数 p のシンプレクティック成

分とすれば,

$$qp = (e_0\mathcal{Q}_1 + e_2\mathcal{Q}_2)(e_0\mathcal{P}_1 + e_2\mathcal{P}_2)$$
$$= e_0(\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2\overline{\mathcal{Q}_2}) + e_2(\overline{\mathcal{Q}_1}\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_2) \tag{1.37}$$

となる．右辺に現れる因子 $\mathcal{Q}_i, \mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2)$ の順序は今の場合，交換するから同等だが，1.6 節で説明する方法に従った．このかき方は，複素数の‘複素化’である．複素数を丁度実数の組 (x, y) で表したと同様，四元数は複素数の組 $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ で与えられ，その積

$$(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = (\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2\overline{\mathcal{Q}_2}, \overline{\mathcal{Q}_1}\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_2) \tag{1.38}$$

は逆に組成法則から導けるのである．これは八元数の場合にも適用できる Cayley-Dickson の構成法（2 重化法）である．言い換えれば，シンプレクティック表示はこの方法を複素数に適用して，四元数を得る方法に他ならない．これを，(1.11) に習って，

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} + e_2\mathbb{C} \tag{1.39}$$

とかくことにする．(1.36d) から $\mathbb{H}$ の部分空間としての $\mathbb{C}$ と $e_2\mathbb{C}$ は直交する．

四元数 q, p のシンプレクティック表示を用いて (ただし，因子の順序は (1.37) のようには拘らない),

$$qp = (e_0\mathcal{Q}_1 + e_2\mathcal{Q}_2)(e_0\mathcal{P}_1 + e_2\mathcal{P}_2) = e_0(\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1 - \overline{\mathcal{Q}_2}\mathcal{P}_2)$$
$$+ e_2(\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_1 + \overline{\mathcal{Q}_1}\mathcal{P}_2) \tag{1.40a}$$

$$pq = (e_0\mathcal{P}_1 + \overline{\mathcal{P}_2}e_2)(e_0\mathcal{Q}_1 + \overline{\mathcal{Q}_2}e_2)$$
$$= e_0(\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1 - \overline{\mathcal{P}_2}\mathcal{Q}_2) + (\overline{\mathcal{P}_2}\ \overline{\mathcal{Q}_1} + \mathcal{P}_1\overline{\mathcal{Q}_2})e_2 \tag{1.40b}$$

を得る．従って，四元数 q による左移動と呼ばれる変換 $p \to qp$ は次の 1 次変換を引き起こす．

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{P}'_1 \\ \mathcal{P}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & -\overline{\mathcal{Q}}_2 \\ \mathcal{Q}_2 & \overline{\mathcal{Q}}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \end{pmatrix} \tag{1.40c}$$

同様に，四元数 q による右移動 $p \to pq$ の引き起こす 1 次変換は

$$(\mathcal{P}_1, \overline{\mathcal{P}_2}) \to (\mathcal{P}'_1, \overline{\mathcal{P}'_2}) = (\mathcal{P}_1, \overline{\mathcal{P}_2}) \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & \overline{\mathcal{Q}}_2 \\ -\mathcal{Q}_2 & \overline{\mathcal{Q}}_1 \end{pmatrix} \tag{1.40d}$$

で与えられる．ここに現れる（e_3 を虚数単位とする) 複素行列は四元数の表現である．実際，左移動に現れる行列

$$f(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & -\overline{\mathcal{Q}}_2 \\ \mathcal{Q}_2 & \overline{\mathcal{Q}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + q_3 e_3 & -q_2 + q_1 e_3 \\ q_2 + q_1 e_3 & q_0 - q_3 e_3 \end{pmatrix} \tag{1.40e}$$

は

$$\begin{aligned} f(\alpha q + \alpha' q') &= \alpha f(q) + \alpha' f(q'), \quad \alpha,\ \alpha' \in \mathbb{R} \\ f(qq') &= f(q) f(q') \end{aligned} \tag{1.40f}$$

を満足するので，四元数の表現である．よく知られているように，四元数の既約表現は同値を除いて，2 次元表現 $q \to f(q)$ しかない．同様に右移動に現れる行列

$$g(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & \overline{\mathcal{Q}}_2 \\ -\mathcal{Q}_2 & \overline{\mathcal{Q}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & -e_3 \end{pmatrix} f(q) \begin{pmatrix} -e_3 & 0 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} \tag{1.40g}$$

も $f(q)$ に同値な四元数の行列表現である．

表現 $q \to f(q)$ は四元数の集合を 2×2 の（e_3 を虚数単位とする) 複素行列の集合に写像する．これは四元数の Pauli 表現と言われる．行列の積は結合則を満たすので，四元数も結合則を満たす．もちろん，四元数の結合則は (1.27) のように直接示す方がてっとり早い．

なお，写像 $q \to f(q)$ は $|q| = 1$ のとき，(1.35) で述べた $SL(1, \mathbb{H}) \cong Sp(1)$ の同型写像を与える．実際，2 つの四元数 a, b の積 $\bar{a}b$ が任意の四元数 q による左移動 $a \to qa$, $b \to qb$ に対して不変になるのは，$q \in SL(1, \mathbb{H})$ のときである (右移動 $a \to aq$, $b \to bq$ のもとで不変な積は $a\bar{b}$)．$a = e_0 A_1 + e_2 A_2$, $b = e_0 B_1 + e_2 B_2$ をそれぞれ a, b のシンプレクティック表示とすれば，$\bar{a}b$ のシンプレクティック表示は

$$\bar{a}b = (\overline{A_1}, \overline{A_2}) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + e_2 (A_1, A_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，(1.40c,e) を使うと，$\bar{a}b$ の不変性は，

$$\bar{f}^T(q)f(q) = 1_2$$

$$f^T(q)Jf(q) = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を意味する．ただし，1_2 は 2 次の単位行列を表す (今後 n 次の単位行列を 1_n とかく)．$f(q)$ がユニタリかつシンプレクティックな行列であるというこの 2 つの条件は $f(q) \in Sp(1) = U(2) \cap Sp(1, \mathbb{C})$ を意味するが，これらは $|q| = 1$ のとき満たされている．それ故，$q \to f(q)$, $q \in SL(1, \mathbb{H})$ は $SL(1, \mathbb{H})$ から $Sp(1)$ への同型写像を定義する．これを一般化すれば，四元数のシンプレクティック表示に基づいて，四元数体上のユニタリ群 $U(n, \mathbb{H})$ ($n = 1$ のとき $SL(1, \mathbb{H})$ に等しい) と複素数体上のシンプレクティック群 $Sp(n)$ が同型であることを証明できるが，ここでは立ち入らない．

1.4　四元数の幾何学的意味

四元数は空間回転と 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の回転を記述するという幾何学的意味を持つ．それを調べていくと，回転群 $SO(3)$ や $SO(4)$ に到達する．ここでは初歩的な計算結果のみで四元数の幾何学的意味を伝えたい．

いま四元数 ξ の次のような変換を考える．

$$f_q(\xi) = \xi' = q\xi q^{-1}, \quad q \in SL(1, \mathbb{H}) \tag{1.41a}$$

明らかに，ξ の実部（スカラー部分）は変換 (1.41a) のもとで，影響を受けない．従って，上の変換は四元数の単位元を不変に保つ四元数から四元数への写像である．その写像は上への 1:1 写像であって，$\mathbb{H}$ の**自己同型写像**と言われる．その集合が**自己同型群** $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ である． 今，$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = SO(3)$ を次のように証明する．(1.41a) は

$$\xi_0' = \xi_0$$

$$\boldsymbol{\xi}' \cdot \boldsymbol{e} = e^u(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{e})e^{-u}, \quad u \in \mathbb{H}_0 \tag{1.41b}$$

となる．ここで，単位四元数 $q \in SL(1, \mathbb{H})$ は $q = e^u$, $\bar{u} = -u$ とかけることを

使った．その理由は，$\bar{q} = e^{-u}$ なので，$q\bar{q} = 1$ が示せるからである．単位四元数の集合はシンプレクティック群 $Sp(1)$ であることを思い出し，$Sp(1)$ のパラメータ空間の座標として，単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ および実数 θ を選び，

$$q = e^u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad u = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{H}_0 \tag{1.41c}$$

とおく[13)]．簡単な計算の後，

$$\xi'_i = R_{ij}\xi_j$$
$$R_{ij} = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j)\cos\theta - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\theta \tag{1.41d}$$

が得られる．これは $\boldsymbol{n}$ 軸周りの角度 θ のベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の回転を表す．Levi-Civita シンボルの満たす恒等式 (1.27e) を使えば，容易に

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij} \tag{1.41e}$$

を確かめることができる．即ち，行列 $R = (R_{ij}) = R(q)$ は直交行列で，$\theta \to 0$ のとき，$R_{ij} \to \delta_{ij}$ は恒等変換になるから，連続性により $\det R = 1$ である．即ち $R \in SO(3)$ であるが，$\theta = \pi$ のときは，$\boldsymbol{n} \to -\boldsymbol{n}$ としても同じ回転を与えるから，$SO(3)$ のパラメータ空間は半径 π の球で，球面上の対蹠点は同一視される．従って，$SO(3)$ (のパラメータ空間) は，単連結ではなく，2 重連結であるという[14)]．$R(q) \in SO(3)$ は直接計算しなくとも，$|\boldsymbol{\xi}'\cdot\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{e}|$ からもわかる．なぜなら，この式はベクトルの長さ $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ が不変に保たれることを意味しており，ベクトル $\boldsymbol{\xi}'$ がベクトル $\boldsymbol{\xi}$ から連続変形で得られることは明らかだからである．ゆえに，(1.41c) で与えられる q を用いた変換 (1.41a) は 3 次元ベクトルの回転を表す．ただし，同一の回転に 2 つの四元数 $q, -q$ が対応しているから，回転群 $SO(3)$ の普遍被覆群[15)]$\overline{SO}(3)$ がユニタリ群 $Sp(1) \cong SU(2)$ に同型であることを示している．

もし，変換

$$\xi' = q\xi p^{-1}, \quad q, p \in SL(1, \mathbb{H}) \tag{1.42a}$$

を考えたらどうなるだろうか．上の例と同じく，単位四元数を，単位ベクトル $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ を持つ純四元数 u, v を用いて

$$q = e^u = \cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\sin\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right), \quad u = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \in \mathbb{H}_0$$

$$p = e^v = \cos\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right) + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{m})\sin\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right), \quad v = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{m}\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right) \in \mathbb{H}_0 \tag{1.42b}$$

とかくと，

$$\begin{aligned}
\xi'_\mu &= R_{\mu\nu}\xi_\nu \\
R_{00} &= c_1c_2 + s_1s_2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}) \\
R_{0i} &= -s_1c_2n_i + c_1s_2m_i - s_1s_2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})_i \\
R_{i0} &= s_1c_2n_i - c_1s_2m_i - s_1s_2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})_i \\
\\
R_{ij} &= c_1c_2\delta_{ij} - s_1c_2\varepsilon_{ijk}n_k - c_1s_2\varepsilon_{ijk}m_k \\
&\quad + s_1s_2n_im_j + s_1s_2m_in_j - s_1s_2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})\delta_{ij} \\
R_{\mu\rho}R_{\rho\nu} &= \delta_{\mu\nu}, \quad \det(R_{\mu\nu}) = 1
\end{aligned} \tag{1.42c}$$

を得る．ただし，$c_i = \cos(\vartheta_i/2), s_i = \sin(\vartheta_i/2)$ $(i = 1, 2)$ とおいた．上で与えた $R_{\mu\nu}$ の具体形は不要であるが，$p = q$ (則ち，$c_1 = c_2, s_1 = s_2, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$) のときに，$R_{00} = 1, R_{i0} = R_{0i} = 0$ で空間成分は (1.41d) の R_{ij} に一致することを目で追って貰うため，かき添えた．従って，この場合の変換は 4 次元ベクトル $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の回転を表す．ただし，同一の 4 次元ベクトルの回転に 2 組の四元数 $(q, p), (-q, -p)$ が対応しているから，$SO(4) \cong SO(3) \times SO(3)$ の普遍被覆群 $\overline{SO}(4) \cong \overline{SO}(3) \times \overline{SO}(3)$ が $SU(2) \times SU(2)$ であることを示している．

なお，四元数のスカラー積 (1.23) は (1.32) で与えられるので，変換 (1.42a) のもとで不変である．実際，ξ, η を四元数として，四元数の結合の法則と $|q| = |p| = 1$ を使うと，

$$\langle\xi', \eta'\rangle = \frac{1}{2}(\overline{\xi'}\eta' + \overline{\eta'}\xi') = \frac{1}{2}[(\overline{q\xi p^{-1}})(q\eta p^{-1}) + (\overline{q\eta p^{-1}})(q\xi p^{-1})] = \langle\xi, \eta\rangle$$

が容易に示せる．従って，四元数の集合である 4 次元ユークリッド空間のスカラー積は，基底の選び方によらない．

1.5 八元数

1.3 節で，Cayley-Dickson の 2 重化法を適用して，複素数の '複素化' により四元数が得られることを示した．この節では，四元数の '複素化' により，八元

数[16)]を定義しよう．なお，三元数は存在しないので，六元数も存在しない．

四元数の組 q, Q を用いて，8 つの実数の成分を持つ八元数 (q, Q) を作る（$(q, Q) = (q', Q')$ は $q = q', Q = Q'$ を意味する）．その和は成分毎の和で与えられ，実数 α との積は $\alpha(q, Q) = (\alpha q, \alpha Q) = (q\alpha, Q\alpha) = (q, Q)\alpha$ で定義される．加法の単位元を $0 \equiv (0, 0)$ とする．ただし，括弧内の 0 は四元数の加法の単位元 $0 \equiv 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ を表す．従って，八元数の集合 $\mathbb{O}$ は，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．八元数の積は

$$(q, Q)(p, P) = (qp - P\overline{Q},\ \overline{q}P + pQ), \quad q, Q, p, P \in \mathbb{H} \tag{1.43}$$

で与えられるとする．積の単位元を $1 \equiv (1, 0)$ とかく．ここで，括弧内の 1 は四元数の積の単位元 $1 \equiv 1e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ を表す．確かに，$(1, 0)(q, Q) = (q, Q)(1, 0) = (q, Q)$ が成り立つ．そこで，八元数の実部を

$$\mathrm{Re}\,(q, Q) = (\mathrm{Re}\,q, 0) \tag{1.44a}$$

で定義する．ここで，$\mathrm{Re}\,q$ は四元数 q の実部を表す．その結果，八元数の実部に関しては，四元数のときと同じ関係

$$\mathrm{Re}\,[(q, Q)(p, P)] = \mathrm{Re}\,[(p, P)(q, Q)] \tag{1.44b}$$

が成り立つ．

上の積の定義は $\mathbb{O}$ が組成代数をなすという要求から逆に導かれる．このことは次節で Hurwitz の定理を紹介する際説明するが，ここでは，逆に，上の積の定義からノルムの組成法則を導くことにしよう．

八元数 (q, Q) の共役元は

$$\overline{(q, Q)} = (\bar{q}, -Q) \tag{1.45a}$$

で定義する．これは，八元数を $(q, Q) = (x_0, x_1, \cdots, x_7)$ と成分表示したとき，その共役が $\overline{(q, Q)} = (x_0, -x_1, \cdots, -x_7)$ で与えられることを意味する．すると，直ちに

$$\begin{aligned}
\overline{(q, Q)(p, P)} &= \overline{(qp - P\overline{Q}, \overline{q}P + pQ)} = (\overline{qp - P\overline{Q}}, -\overline{q}P - pQ) \\
&= (\overline{p}\,\overline{q} - Q\overline{P}, -\overline{q}P - pQ) \\
\overline{(p, P)}\,\overline{(q, Q)} &= (\overline{p}, -P)\,(\overline{q}, -Q) = (\overline{p}\,\overline{q} - Q\overline{P}, -pQ - \overline{q}P)
\end{aligned} \tag{1.45b}$$

の両式が等しいことがわかるから，

$$\overline{(q,Q)(p,P)} = \overline{(p,P)}\,\overline{(q,Q)} \tag{1.45c}$$

が成り立つ．一方，スカラー積は $(q,Q) = (x_0, x_1, \cdots, x_7), (p,P) = (y_0, y_1, \cdots, y_7)$ に対して，

$$\langle (q,Q),(p,P)\rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_7y_7 = \frac{1}{2}[\overline{(q,Q)}(p,P) + \overline{(p,P)}(q,Q)] \tag{1.46a}$$

となる．最後の等式が組成法則から導けることは次節で証明するが，(1.46a) の意味するところだけここでは述べておく．

$$\begin{aligned}
(1.46\text{a})\text{ の右辺} &= \frac{1}{2}[(\overline{q},-Q)(p,P) + (\overline{p},-P)(q,Q)] \\
&= \frac{1}{2}[(\overline{q}\,p + P\overline{Q}, qP - pQ) + (\overline{p}\,q + Q\overline{P}, pQ - qP) \\
&= \frac{1}{2}[(\overline{q}\,p + P\overline{Q} + \overline{p}\,q + Q\overline{P}, 0) \\
&\equiv x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_7y_7
\end{aligned} \tag{1.46b}$$

ここで，$(q,Q),(p,P)$ の成分表示は $q = x_\mu e_\mu, p = y_\mu e_\mu, Q = x_{i+3}e_i + x_7e_0, P = y_{i+3}e_i + y_7e_0$, $(\mu = 0,1,2,3,\ i = 1,2,3)$ を意味することを利用した．ただし，係数の $x_\mu, x_{i+3}, x_7, y_\mu, y_{i+3}, y_7$ はすべて実数である．すると，八元数 $(q,0)$ と八元数 $(0,Q)$ は互いに直交する．

$$\begin{aligned}
\langle (q,0),(0,Q)\rangle &= \frac{1}{2}[\overline{(q,0)}(0,Q) + \overline{(0,Q)}(q,0)] \\
&= \frac{1}{2}[(\overline{q},0)(0,Q) + (0,-Q)(q,0)] = 0
\end{aligned} \tag{1.46c}$$

四元数は結合の法則を満足する組成代数であったが，八元数の積は最早結合の法則が成り立たない．事実，

$$\begin{aligned}
[(q,Q)(p,P)](r,R) &= (qp - P\overline{Q},\ \overline{q}P + pQ)(r,R) \\
&= ([qp - P\overline{Q}]r - R\overline{[\overline{q}P + pQ]},\ \overline{[qp - P\,\overline{Q}]}R + r[\overline{q}P + pQ])
\end{aligned} \tag{1.47a}$$

$$(q,Q)[(p,P)(r,R)] = (q,Q)[(pr - R\overline{P},\ \overline{p}R + rP)]$$

$$= (q[pr - R\overline{P}] - [\overline{p}R + rP]\overline{Q},\ \overline{q}[\overline{p}R + rP] + [pr - R\overline{P}]Q) \tag{1.47b}$$

となるが，q, Q などは四元数であり，最早交換しないから，一般には (1.47a,b) の右辺は等しくなくなる．従って，八元数は非結合型の多元環である．

$$[(q, Q)(p, P)](r, R) \neq (q, Q)[(p, P)(r, R)]$$

あるいは，$X = (q, Q), Y = (p, P), Z = (r, R)$ とおけば，

$$(XY)Z \neq X(YZ) \quad X, Y, Z \in \mathbb{O} \tag{1.48}$$

である．それ故，$\mathbb{O}$ は体をなさない．しかしながら，因子の特別の組み合わせに対しては (1.47a,b) の右辺が等しくなることがある．実際 (1.47) で順次，$(p,\ P) = (q,\ Q), (r,\ R) = (p,\ P), (r,\ R) = (q,\ Q)$ とおけば，四元数の結合則と四元数と実数との交換則を使って

$$[(q, Q)(q, Q)](p, P) = (q, Q)[(q, Q)(p, P)] \to (XX)Y = X(XY) \tag{1.49a}$$

$$[(q, Q)(p, P)](p, P) = (q, Q)[(p, P)(p, P)] \to (XY)Y = X(YY) \tag{1.49b}$$

$$[(q, Q)(p, P)](q, Q) = (q, Q)[(p, P)(q, Q)] \to (XY)X = X(YX) \tag{1.49c}$$

が導かれる．これらの関係式は (1.7) と同じであり，八元数が交代的多元環であることを示す．この八元数の交代性も組成法則からの帰結であることを次節で証明する．さらに，共役の定義とその性質 (1.45a,c) は

$$\overline{X} = 2\mathrm{Re}\,[X] - X \tag{1.49d}$$

$$\overline{XY} = \overline{Y}\,\overline{X} \tag{1.49e}$$

とかける．さらに，(1.44b) は

$$\mathrm{Re}\,[XY] = \mathrm{Re}\,[YX] \tag{1.49f}$$

とかける．(1.49a,b,c) において，(1.49d) を用いれば，

$$(\overline{X}X)Y = \overline{X}(XY), \quad (XY)\overline{Y} = X(Y\overline{Y}), \quad (\overline{X}Y)X = \overline{X}(YX) \tag{1.50}$$

が成り立つことがわかる．

いま，**結合子 (associator)** を

$$(X, Y, Z) = X(YZ) - (XY)Z \tag{1.51}$$

で定義する．すると，(1.49a,b,c) は

$$(X, X, Y) = 0 \tag{1.52a}$$

$$(X, Y, Y) = 0 \tag{1.52b}$$

$$(X, Y, X) = 0 \tag{1.52c}$$

を意味する．そこで，(1.52a) において，$X \to X + Z$ とおけば，

$$(X + Z, X + Z, Y) = 0$$

となるが，X を 2 つ含む項，Z を 2 つ含む項は (1.52a) によりゼロになるから，

$$(X, Z, Y) + (Z, X, Y) = 0 \tag{1.53a}$$

を得る．同様に，(1.52b,c) において，それぞれ $Y \to Y + Z, X \to X + Z$ とおけば，

$$(X, Z, Y) + (X, Y, Z) = 0, \quad (X, Y, Z) + (Z, Y, X) = 0 \tag{1.53b}$$

を得る．(1.53a,b) を合わせると，

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) &= (Y, Z, X) = (Z, X, Y) \\ &= -(Y, X, Z) = -(Z, Y, X) = -(X, Z, Y)\end{aligned} \tag{1.53c}$$

という関係式に導かれる．これを，結合子 (X, Y, Z) の交代性という．特に，$(X, XY, Z) = (XY, Z, X)$ と $(X, Y, ZX) = (Y, ZX, X)$ の両辺を加えると，

$$\begin{aligned}&X((XY)Z) - (X^2Y)Z + X(Y(ZX)) - (XY)(ZX) \\ &= (XY)(ZX) - ((XY)Z)X + Y(ZX^2) - (Y(ZX))X\end{aligned}$$

が得られる．これから

$$\begin{aligned}&(X^2Y)Z + 2(XY)(ZX) + Y(ZX^2) \\ &= X((XY)Z) + X(Y(ZX)) + ((XY)Z)X + (Y(ZX))X \\ &= X[-(X, Y, Z) + X(YZ) + (Y, Z, X) + (YZ)X] \\ &\quad + [-(X, Y, Z) + X(YZ) + (Y, Z, X) + (YZ)X]X\end{aligned}$$

$$= X^2(YZ) + (YZ)X^2 + 2X(YZ)X \tag{1.53d}$$

が導かれる．ここで，最後の式に移るとき，再び結合子の交代性を使い，$(X, YZ, X) = X((YZ)X) - (X(YZ))X = 0$ から $X((YZ)X) = (X(YZ))X = X(YZ)X$ とおけることに注意した．ところが (1.53d) は

$$2(XY)(ZX) + (Y, Z, X^2) = 2X(YZ)X + (X^2, Y, Z)$$

となり，$(Y, Z, X^2) = (X^2, Y, Z)$ であるから，結局

$$(XY)(ZX) = X(YZ)X \tag{1.53e}$$

を得る．これを **Moufang の恒等式**という．

ところで，(1.50) の例えば真ん中の式は

$$(X, Y, \overline{Y}) = 0$$

とかける．ここで，$Y \to Y + XY$ とおき換えて，再びこの式を使うと，

$$(X, Y, \overline{XY}) + (X, XY, \overline{Y}) = 0$$

になるが，これは既に得られた公式を使うと，

$$X[Y(\overline{XY})] - (XY)(\overline{XY}) = -X[(XY)\overline{Y}] + [X(XY)]\overline{Y}$$
$$X[Y(\overline{Y}\,\overline{X})] - |XY|^2 = -X[X|Y|^2] + [X^2Y]\overline{Y}$$
$$X(|Y|^2\overline{X}) - |XY|^2 = -X^2|Y|^2 + X^2|Y|^2 = 0$$

のように組成法則

$$|X|^2|Y|^2 = |XY|^2 \tag{1.54a}$$

に他ならない．ただし，ノルムの自乗は

$$N(X) = |X|^2 \equiv \overline{X}X = \overline{(q, Q)}(q, Q) = (\overline{q}, -Q)(q, Q) = (\overline{q}q + Q\overline{Q},\ 0)$$
$$= (|q|^2 + |Q|^2)(1,\ 0) = (q, Q)\overline{(q, Q)} = X\overline{X} \tag{1.54b}$$

のように実数となり，ゼロでない八元数 $X = (q, Q)$ の逆は $X^{-1} = \overline{(q, Q)}/(|q|^2 + |Q|^2) = \overline{X}/|X|^2$ で与えられる．

次に，

$$X = (q, Q) = q + e_7 Q, \quad e_7^2 = -1 \tag{1.55a}$$

とおく．(1.46c) により，q と $e_7 Q$ は直交するから，これは，

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} + e_7 \mathbb{H} \tag{1.55b}$$

を意味する．$X \in \mathbb{O}$ の共役元は

$$\bar{X} = (\overline{q}, -Q) = \overline{q} - e_7 Q = 2\mathrm{Re}\,[X] - X \tag{1.55c}$$

で与えられ，(1.49d) と一致する．新しい虚数単位 e_7 は四元数の単位元 e_0 とは可換 ($e_7 e_0 = e_0 e_7$)，Hamilton の虚数単位 $\{e_i\}$ とは反可換 ($e_7 e_i = -e_i e_7$) であると仮定する．この仮定は共役元の定義 (1.55c) とその性質 (1.49e) から導かれる．実際 (1.55c) で $q = 0, Q = e_0$ とおけば，$\overline{e_7} = -e_7$ が導け，$|e_7| = 1$ と仮定すれば，$e_7^2 = -1$ が得られる．また，$\overline{e_7 Q} = \overline{Q}\,\overline{e_7} = -\overline{Q} e_7 = -e_7 Q$ となるべきことから，e_7 についての所与の仮定が成り立つべきことがわかる．

一方，積の定義 (1.43) は

$$XY = (q + e_7 Q)(p + e_7 P) = qp - P\overline{Q} + e_7(\overline{q}P + pQ) \tag{1.56a}$$

となる．これから四元数に対して，$\mathrm{Re}\,[qp]$ $=\mathrm{Re}\,[pq]$, $\mathrm{Re}\,[P\overline{Q}] = \mathrm{Re}\,[\overline{P\overline{Q}}] = \mathrm{Re}\,[Q\overline{P}]$ となることを使えば，(1.44b)

$$\mathrm{Re}\,[XY] = \mathrm{Re}\,[YX] \tag{1.56b}$$

が再度確認される．更に，

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \overline{qp - P\overline{Q}} - e_7(\overline{q}P + pQ) = \overline{p}\,\overline{q} - Q\overline{P} - e_7(\overline{q}P + pQ) \\ \overline{Y}\,\overline{X} &= (\overline{p} - e_7 P)(\overline{q} - e_7 Q) = \overline{p}\,\overline{q} - Q\overline{P} + e_7(-pQ - \overline{q}P) \end{aligned} \tag{1.56c}$$

から (1.49e) も再度確かめられる．さらに，スカラー積 (1.46a) は

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}[\overline{X}Y + \overline{Y}X] \tag{1.56d}$$

とかける．

さて，(1.56a) は四元数の積法則 (1.24a) に加え，次の関係式を意味する．

$$(e_7 Q)p = e_7(pQ) \to (e_7 e_i)e_j = e_7(e_j e_i)$$

$$q(e_7 P) = e_7(\overline{q}P) \to e_i(e_7 e_j) = -e_7(e_i e_j)$$

$$(e_7Q)(e_7P) = -P\overline{Q} \to (e_7e_\mu)(e_7e_\nu) = -e_\nu\overline{e_\mu} \tag{1.57}$$

八元数の単位元をも e_0 で表し，

$$e_7e_i = -e_ie_7 = e_{3+i} \tag{1.58a}$$

とおくと (1.57) は次のようになる．

$$\begin{aligned} e_{3+i}e_j &= -\delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k} \\ e_ie_{3+j} &= \delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k} \\ e_{3+i}e_{3+j} &= -\delta_{ij}e_0 - \varepsilon_{ijk}e_k \\ e_7e_{3+i} &= -e_i \end{aligned} \tag{1.58b}$$

(1.55a) は，八元数の成分をなす四元数を $q = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$，$Q = x_7e_0 + x_4e_1 + x_5e_2 + x_6e_3$ とおいたことを思い出すと，

$$X = x_0e_0 + \sum_{A=1}^{7} x_Ae_A, \quad x_0, x_A \in \mathbb{R} \tag{1.59a}$$

とかける．ただし，八元数の基底 e_0, e_A $(A = 1, 2, \cdots, 7)$ は (1.24a) および (1.58a,b) をまとめて次の積法則

$e_0e_A = e_Ae_0 = e_A$

$e_Ae_B = -\delta_{AB}e_0 + a_{ABC}e_C$

a_{ABC} は添字 (ABC) に関して完全反対称で，次の添字の組に対して $+1$，

他の組に対して 0 の値を取る

$$(ABC) = (123), (147), (165), (257), (246), (367), (354) \tag{1.59b}$$

に従うことがわかる．このように，八元数の乗積表は規則性はあっても四元数の乗積表に較べて若干複雑になる．以下，遊び心のつもりで，この基底の乗積表の覚え方をいくつか紹介する．

1 つは図 1 の様に円を描いてその円周上に等間隔にマークした 7 つの黒丸の各々に八元数の基底 $e_1, e_2, e_4, e_3, e_6, e_5, e_7$ を右回りの順に対応させる．そして図のような 3 角形を 7 つ描く (その描き方は図から明らかであろう)．すると，どの 3 角形の頂点にも八元数の基底が対応している (1 つの基底は重複して 2 つ

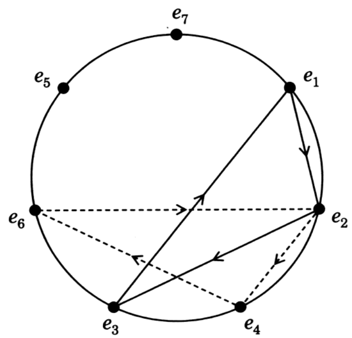


図 1

の 3 角形の頂点に対応する)．そこで，各 3 角形の 3 つの辺には右回りに矢印をつける．このとき，各 3 角形の頂点に対応する八元数の基底は右回りの約束で閉じた Hamilton の虚数単位の乗積表に従う．基底の順番を間違えなければ，これで (1.59b) の乗積表が得られたことになる．例えば，図に示した 3 角形に対しては $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_4 = e_6$ となる．また図には示していないが $\{e_4, e_3, e_5\}$ を結ぶ 3 角形に対応する $e_3e_4 = -e_5$ と，$\{e_1, e_6, e_5\}$ を結ぶ 3 角形に対応する $e_1e_6 = e_5$ も得られる．これらを両立させれば

$$(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = -e_5$$

$$e_1(e_2e_4) = e_1e_6 = e_5$$

となり結合の法則が破れていることがわかる．

この図を参照しながら，八元数の自己同型群が 14-パラメータの例外型 Lie 群 G_2 であることを思い出しておこう．e_A $(A = 1, 2, \cdots, 7)$ を単に $\langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB}$ を満たす正規直交基底だとすると，これを不変に保つ変換群で単位元を含むのは $SO(7)$ である．たとえば，基底 e_A を変えない平面 $\langle e_B, e_C \rangle, \langle e_D, e_E \rangle, \langle e_F, e_G \rangle$ の回転はそれぞれ 1 つのパラメータで記述できるので，合計 3 つの独立なパラメータが存在する．ここで，与えられた A に対して選ばれる 3 つの平面は，上図において，e_A を頂点の 1 つとする実線や破線のような 3 角形を 3 つ描いたとき，e_A を含まない辺が丁度 3 つあるが，その辺の頂点 $(e_B, e_C), (e_D, e_E), (e_F, e_G)$ に対応する．具体的な平面の選び方は付録 A で述べる．一例として，$A = 1$

のときの平面は，$\langle e_2, e_3\rangle, \langle e_6, e_5\rangle, \langle e_4, e_7\rangle$ の順序で選ぶ．$A = 1, 2, \cdots, 7$ なので，独立なパラメータは合計 $3 \times 7 = 21$ 個ある．これは $SO(7)$ の次元と一致する．一方，八元数の自己同型 g は定義により，任意の $X, Y \in \mathbb{O}$ に対して，$g(XY) = g(X)g(Y)$ を満足する．従って，単位元は不変に保たれ，$g(e_Ae_B) = g(e_A)g(e_B) = a_{ABC}g(e_C), (A \neq B)$ が成り立つ．基底に対するスカラー積は $\langle e_A, e_B\rangle = (1/2)[\bar{e}_Ae_B + \bar{e}_Be_A] = \delta_{AB}$ により定義されるので，これを不変に保つ変換群で単位元を含むものは明らかに $SO(7)$ であるが，八元数の自己同型の定義により，基底 e_A $(A = 1, 2, \cdots, 7)$ を固定する上で述べた 3 つの平面の回転はすべてが独立ではなくなり，(固定された) 各基底に対して，2 つの平面の回転を自由に選べば，残りの平面の回転角は決まってしまうという特徴を持つ．それは，たとえば， $g(e_1) = e_1$ のとき，平面 $\langle e_2, e_3\rangle, \langle e_6, e_5\rangle, \langle e_4, e_7\rangle$ の回転角をそれぞれ $\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_3^{(1)}$ とすれば，条件 $g(e_2)g(e_5) = g(e_7), g(e_2)g(e_4) = g(e_6), g(e_4)g(e_3) = g(e_5)$ および $g(e_3)g(e_6) = g(e_7)$ から，$\phi_1^{(1)} + \phi_2^{(1)} + \phi_3^{(1)} = 0$ (2π を法として) が導かれる．残りの自己同型の条件，$g(e_2)g(e_3) = g(e_1) = e_1, g(e_1)g(e_6) = e_1g(e_6) = g(e_5), g(e_1)g(e_4) = e_1g(e_4) = g(e_7)$ からは新しい条件式は出てこない．同様にして，$A = 2, 3, \cdots, 7$ に対しても関係式 $\phi_1^{(A)} + \phi_2^{(A)} + \phi_3^{(A)} = 0$ (2π を法として) が成り立つ．それ故，八元数の自己同型は合計 $2 \times 7 = 14$ 個の独立なパラメータしか持たない．これは，$SO(7)$ の部分群である例外群 G_2 の次元数に等しい．このようにして，八元数の自己同型群 G_2 を具体的に構成する方法は，Günaydin-Gürsey によって与えられた (1973)[17)]．参考のため，この方法の説明とそれに基づく G_2 の Lie 代数 $\mathcal{G}_2$ の構造を付録 A にまとめておいた．そこで，G_2 の部分群に $SU(3)$ が含まれるというよく知られた事実が紹介される．八元数のいわゆる**スプリット基底**を用いた $SU(3)$ ゲージ理論については第 8 章を参照されたい．

八元数の乗積表の図式的な覚え方に戻って，2 つ目は図 2 のような 3 角形とそれに内接する円を描き，3 角形の各頂点から対辺の内接点へ直線を引く．これらの直線は 1 点で交叉する (平面幾何ではこれを Gergonne 点という)．この交点と内接点および 3 角形の頂点は合計 7 つの点からなる．そこで，それらの 7 つの点に八元数の基底を図のように対応させる．この対応は，内接点には右回りに図のように，e_1, e_2, e_3 の順であてがい，3 角形の頂点には右下からやはり右

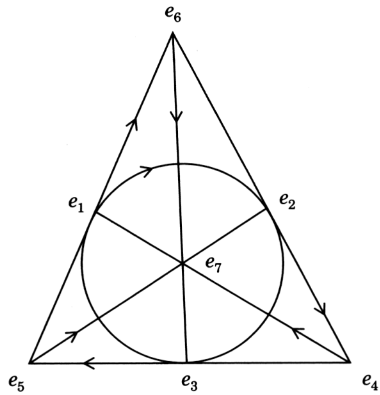


図 **2**

回りに，e_4, e_5, e_6 の順で名前を付け，Gergonne 点には e_7 を対応させる．最後に 3 角形の辺には右回りに矢 印を，内接円にも右回りの矢印を，最後に 3 角形の頂点から対辺の内接点に引いた直線にはその方向に矢印をつける．1 本の直線 (3 角形の各辺も 1 本の直線と考える) または円周上には八元数の基底が丁度 3 つずつ並ぶことになるが，各々が，矢印の方向で Hamilton の虚数単位の乗積表に従うとするのである．例えば，円周上の 3 点および，3 角形の右側の辺に対しては $e_1e_2 = e_3$，$e_2e_4 = e_6$ となる．また 3 角形の下辺および左側の辺に対しては $e_3e_4 = -e_5$，$e_1e_6 = e_5$ が得られる．これらはもちろん先の図から読み取れたものと一致し，結合則が破れている例

$$(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = -e_5$$
$$e_1(e_2e_4) = e_1e_6 = e_5$$

を与える．

最後に正方形のマス目からなる次ページの図を取り上げる．最初の行のマス目には 1, 2, 4, 3, 6, 5, 7 の数字が割り振られている．これは，八元数の基底 $e_1, e_2, e_4, e_3, e_6, e_5, e_7$ の番号に対応する． この順番は図 1 の円周上の 7 つの点を 1 からスタートして右回りに数えた場合に丁度対応する．残りのマス目は，合計 $7 \times 7 = 49$ 個あるが，それぞれ真ん中に黒丸があるかないかの違いがある．黒丸は図のように各行に 3 つずつ規則正しく配列されている (規則正しさとは，

1	2	4	3	6	5	7
•	•		•			
	•	•		•		
		•	•		•	
			•	•		•
•				•	•	
	•				•	•
•		•				•

図 **3**

黒丸の配列は対角線およびそれに平行な直線に沿ったマス目にかかれていることを言う)．この 3 つは 上の対応する番号を持つ八元数の 3 つの基底が左から数える順番で Hamilton の虚数単位の乗積表に従うことを意味している．例えば第 1 行目と第 2 行目は $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_4 = e_6$ を意味する．また第 3 行目と第 5 行目の意味は $e_3e_4 = -e_5$, $e_1e_6 = e_5$ である．これらはもちろん先の 2 つの図から読み取れたものと一致し，結合則が破れている例

$$(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = -e_5$$

$$e_1(e_2e_4) = e_1e_6 = e_5$$

を与える．このように，乗積表 (1.59b) の覚え方には，円，三角形，正方形に基づくものがあるが，他にも考えられよう．

八元数 $X = x_0e_0 + \sum_{A=1}^{7} x_Ae_A$ と八元数 $Y = y_0e_0 + \sum_{A=1}^{7} y_Ae_A$ の積は，(1.59b) により，

$$XY = (x_0y_0 - \sum_{A=1}^{7} x_Ay_A) + \sum_{A=1}^{7}(x_0y_A + x_Ay_0)e_A + \sum_{A,B,C=1}^{7} a_{ABC}x_Ay_Be_C \tag{1.59c}$$

で与えられる．さらに，$X \in \mathbb{O}$ の共役元 (1.55c) は

$$\overline{X} = x_0 e_0 - \sum_{A=1}^{7} x_A e_A \qquad (\bar{e}_A = -e_A) \tag{1.59d}$$

となり，よく知られているように，八元数のノルムの自乗は

$$N(X) = |X|^2 = \langle X, X \rangle = X\bar{X} = \bar{X}X = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_7^2 \tag{1.59e}$$

となる．組成法則 (1.54a) は有名な 8 平方和の定理である．$\bar{X} = -X$ を満たす八元数を**純八元数**と呼び，その集合を $\mathbb{O}_0$ と記す．

$$\mathbb{O}_0 = \{X \in \mathbb{O}; \bar{X} = -X\} \tag{1.60a}$$

明らかに，結合子 (X, Y, Z) は純八元数である．実際，結合子 (X, Y, Z) の中の 3 つの因子どれか 1 つが実部しか持たない場合はその結合子はゼロになる．従って，

$$\begin{aligned}
\overline{(X,Y,Z)} &= \overline{X(YZ)} - \overline{(XY)Z} = \overline{(YZ)}\overline{X} - \overline{Z}\overline{(XY)} \\
&= (\overline{Z}\,\overline{Y})\overline{X} - \overline{Z}(\overline{Y}\,\overline{X}) = -(\overline{Z}, \overline{Y}, \overline{X}) \\
&= -(-Z, -Y, -X) = (Z, Y, X) = -(X, Y, Z)
\end{aligned} \tag{1.60b}$$

となる．ここで，結合子の交代性 (1.53c) を用いた．それ故，実部を取るときにはあたかも結合法則が成り立つとしてもよい．

$$\mathrm{Re}\,(X, Y, Z) = 0 \to \mathrm{Re}\,[X(YZ)] = \mathrm{Re}\,[(XY)Z] \tag{1.60c}$$

この応用として

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,[(\overline{Z}X)(YZ)] &= \mathrm{Re}\,[\overline{Z}\{X(YZ)\}] = \mathrm{Re}\,[\{X(YZ)\}\overline{Z}] \\
&= \mathrm{Re}\,[X\{(YZ)\overline{Z}\}] = \mathrm{Re}\,[X\{Y(Z\overline{Z})\}] \\
&= |Z|^2 \mathrm{Re}\,[XY]
\end{aligned} \tag{1.60d}$$

がある．特に，Z が単位八元数，$|Z| = 1$ のときには，$\mathrm{Re}\,[\overline{X}Y]$ は変換 $X \to XZ, Y \to YZ$ のもとで不変である．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,[\overline{(XZ)}(YZ)] &= \mathrm{Re}\,[(\overline{Z}\,\overline{X})(YZ))] \\
&= |Z|^2 \mathrm{Re}\,[\overline{X}Y] = \mathrm{Re}\,[\overline{X}Y], \quad |Z| = 1
\end{aligned} \tag{1.60e}$$

この公式は第 8 章で応用される．

1.6　Hurwitz の定理

実数の集合 $\mathbb{R}$ から出発して，Cayley-Dickson の 2 重化規則を適用して，$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}, \mathbb{H} = \mathbb{C} + e_2\mathbb{C}$，および $\mathbb{O} = \mathbb{H} + e_7\mathbb{H}$ により，

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to \mathbb{O} \tag{1.61}$$

という道を辿ってきた．このように倍増を重ねて新しい (組成法則を満たす) 数体系ができるのは $\mathbb{O}$ でストップすると主張するのが，Hurwitz の定理である．つまり，$X, Y \in \mathbb{O}$ に対して，Cayley-Dickson の 2 重化規則を適用しても，最早組成法則は満足されないというのである．この節では，この美しい定理の証明[18]を紹介する．

今 $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ 上の単位元 1 を持つ n 次の組成代数として，その要素を a, b, c とする．$\mathcal{A}$ の対称で非退化なスカラー積を $\langle a, b\rangle$，ノルムの自乗を $|a|^2 = \langle a, a\rangle$ とかく．a の共役元は

$$\overline{a} = 2\langle a, 1\rangle - a \tag{1.62}$$

で定義される．ゆえに，$\overline{\overline{a}} = \overline{2\langle a, 1\rangle - a} = 2\langle a, 1\rangle - (2\langle a, 1\rangle - a) = a$．ここで，$\overline{\langle a, 1\rangle} = \langle a, 1\rangle$ を使っていることに注意せよ．これは，$\mathcal{A}$ が $\mathbb{R}$ 上で定義され，$x \in \mathbb{R}$ の共役はそれ自身に等しいことを使ったことになる．

さて，$\mathcal{A}$ は組成代数であるから，組成法則 (1.9)，即ち

$$\langle ab, ab\rangle = \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle, \quad a, b \in \mathcal{A} \tag{1.63}$$

が成り立つ．Hurwitz の定理は実数体上の単位元をもつ組成代数は次元 $n = 1, 2, 4, 8$ に対応して $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に限られることを主張するものである．なお，スカラー積は非退化なので，すべての $b \in \mathcal{A}$ に対して，$\langle a, b\rangle = 0$ ならば，$a = 0$ となることを思い出しておく．

(1.63) において，$b \to b + c$ とおいて，

$$\langle ab, ac\rangle = \langle a, a\rangle\langle b, c\rangle \tag{1.64a}$$

同様に，$a \to a + c$ とおいて，

$$\langle ab, cb\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, b\rangle \tag{1.64b}$$

を得る．(1.64a) において，$a \to a + d$ とおけば，

$$\langle ab, dc\rangle + \langle db, ac\rangle = 2\langle a, d\rangle\langle b, c\rangle \tag{1.65a}$$

が導ける．ここで，$d = 1$ とおくと，(1.62) を使って，

$$\langle ab, c\rangle = \langle b, \overline{a}c\rangle \tag{1.65b}$$

となる．これを (1.65a) に用いて，

$$\langle \overline{d}(ab), c\rangle + \langle \overline{a}(db), c\rangle = 2\langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$$

すなわち，

$$\overline{d}(ab) + \overline{a}(db) = 2\langle a, d\rangle b \tag{1.66a}$$

が成り立つ．また，(1.65a) で，$c \leftrightarrow d$ として，$d = 1$ とおけば，共役元の定義 (1.62) を使って，

$$\langle ab, c\rangle = \langle a, c\overline{b}\rangle \tag{1.66b}$$

を得る．これを，(1.65a) に使うと，

$$\langle (ab)\overline{c}, d\rangle + \langle (ac)\overline{b}, d\rangle = 2\langle a, d\rangle\langle b, c\rangle \tag{1.67a}$$

が示せるので，$c \leftrightarrow d$ として，

$$(ab)\overline{d} + (ad)\overline{b} = 2\langle b, d\rangle a \tag{1.67b}$$

が得られる．これまでの公式 (1.65b)，(1.66b) を繰り返し使うと，

$$\langle \overline{b}\,\overline{a}, c\rangle = \langle \overline{a}, bc\rangle = \langle \overline{a}\,\overline{c}, b\rangle = \langle \overline{c}, ab\rangle = \langle \overline{(ab)}\,\overline{c}, 1\rangle = \langle \overline{(ab)}, c\rangle$$

となるから，

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \tag{1.68}$$

が証明される．さらに，$\langle a, b\rangle = \langle 1, \overline{a}b\rangle$ が $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle = \langle 1, \overline{b}a\rangle$ に等しいことから，両辺を加えて，

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}(\overline{a}b + \overline{b}a) \tag{1.69}$$

を得る．

次に，組成法則から交代性を導く．(1.64a) に (1.65b) を用い，(1.64b) に

(1.66b) を用いると，それぞれ

$$\overline{a}(ab) = |a|^2 b \tag{1.70a}$$

$$(ab)\overline{b} = a|b|^2 \tag{1.70b}$$

が得られるが，これらの式はまた，(1.62) により，

$$a(ab) = a^2 b \tag{1.70c}$$

$$(ab)b = ab^2 \tag{1.70d}$$

を意味する．ところで，(1.70c) で $a \to a + c$ とすると，

$$a(cb) + c(ab) = (ac)b + (ca)b \tag{1.70e}$$

が得られるが，ここで，$b \to a, c \to b$ とすれば，

$$a(ba) = (ab)a \tag{1.70f}$$

を得る．既に八元数のときに証明したように，(1.70c,d,f) から，結合子の交代性が導かれる．

$$\begin{aligned} (a,b,c) &= a(bc) - (ab)c = (b,c,a) = (c,a,b) \\ &= -(b,a,c) = -(c,b,a) = -(a,c,b) \end{aligned} \tag{1.70g}$$

このように，$\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ組成代数は，必ず，交代的であることがわかった．八元数のときに示したように，この逆も成り立つ．すなわち，$\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ交代的多元環は組成代数でもある．このような $\mathcal{A}$ はそれ自身単位元を持つ $\mathbb{R}$ 上の組成代数 $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ の，Cayley-Dickson 2 重化法によって得られる (より正確には，多元環 $\mathcal{A}$ の単位元を含む部分多元環を $\mathcal{A}_1$ とすれば，その Cayley-Dickson 2 重化法によって得られる多元環はまた $\mathcal{A}$ の部分多元環である)．そこで，

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + e\mathcal{A}_1, \quad e^2 = -1 \tag{1.71a}$$

とおいたときの $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ は (単位元を持つ) 結合的な組成代数であることを示そう．ここで，e は部分空間 $\mathcal{A}_1$ に直交する単位長さのベクトルである．

$$\langle q, e \rangle = 0, \quad |e| = 1, \quad q \in \mathcal{A}_1 \tag{1.71b}$$

この式から部分空間 $\mathcal{A}_1$ と部分空間 $e\mathcal{A}_1$ が互いに直交することがわかる．

$$\langle q, eQ\rangle = \langle q\overline{Q}, e\rangle = 0, \quad q, Q \in \mathcal{A}_1 \tag{1.71c}$$

ここで，(1.66b) を用いた．従って，$\mathcal{A}$ の任意の元 a は一意的に

$$a = q + eQ, \quad q, Q \in \mathcal{A}_1 \tag{1.71d}$$

とかき表される．ここで，q, Q を予め四元数と仮定しているわけでない．これを，$a = (q, Q)$ とかく場合もある．スカラー積の線形性から，Q と e の直交性を使って，$\langle (q + eQ), 1\rangle = \langle q, 1\rangle + \langle eQ, 1\rangle = \langle q, 1\rangle$ となることから，(1.71d) で与えられる a の共役元 $\overline{a}$ は

$$\overline{a} = \overline{(q + eQ)} = \overline{q} - eQ \tag{1.71e}$$

となることがわかる．従って，$\overline{e} = -e$ および，$\overline{eQ} = -\overline{Q}e = -eQ$ を得る．

表示 (1.71d) に対する積は閉じていなければならない．即ち，

$$(q_1 + eQ_1)(q_2 + eQ_2) = q_3 + eQ_3 \tag{1.72}$$

となり，q_3, Q_3 は $q_{1,2}, Q_{1,2}$ の双一次形式である．以下，この q_3, Q_3 は組成法則から決まることを見よう．そこで，(1.66a) において，$a = e, b = Q, d = \overline{q}$ とおくと，$\langle e, \overline{q}\rangle = 0$ だから，$\overline{e} = -e$ に注意して，

$$q(eQ) = e(\overline{q}Q) \tag{1.73a}$$

を得る．この式の共役を取ると，$\overline{eq} = -eq$ なので，$q \to \overline{q}$ として，

$$(eQ)q = e(qQ) \tag{1.73b}$$

となる．次に，(1.67b) において，$a = e, b = Q_1, d = eQ_2$ とおき，$\langle Q_1, eQ_2\rangle = 0$ に注意すると，$(e, e, Q_2) = 0 \to e(eQ_2) = -Q_2$ だから，

$$(eQ_1)(eQ_2) = -Q_2\overline{Q_1} \tag{1.73c}$$

を得る．その結果，(1.73) を用いて，$\mathcal{A}$ の元の積は，(1.71d) の表示に対して，

$$(q_1 + eQ_1)(q_2 + eQ_2) = (q_1q_2 - Q_2\overline{Q_1}) + e(q_2Q_1 + \overline{q_1}Q_2) \tag{1.74}$$

で与えられることがわかる．

ところがこの $\mathcal{A}_1$ の元は必ず結合則を満たす．それは次のようにして示され

る．(1.64a) に注意すれば，$\langle eQ_1, eQ_2\rangle = |e|\langle Q_1, Q_2\rangle = \langle Q_1, Q_2\rangle$ なので，

$$\langle q_1 + eQ_1, q_2 + eQ_2\rangle = \langle q_1, q_2\rangle + \langle Q_1, Q_2\rangle \tag{1.75a}$$

が得られる．この式は (1.74) および組成法則 (1.63) を使って

$$\begin{aligned}
&\langle (q_1 + eQ_1)(q_2 + eQ_2), (q_1 + eQ_1)(q_2 + eQ_2)\rangle \\
&= \langle (q_1q_2 - Q_2\overline{Q_1}) + e(q_2Q_1 + \overline{q_1}Q_2), (q_1q_2 - Q_2\overline{Q_1}) + e(q_2Q_1 + \overline{q_1}Q_2)\rangle \\
&= \langle q_1q_2 - Q_2\overline{Q_1}, q_1q_2 - Q_2\overline{Q_1})\rangle + \langle q_2Q_1 + \overline{q_1}Q_2, q_2Q_1 + \overline{q_1}Q_2\rangle \\
&= \langle q_1, q_1\rangle\langle q_2, q_2\rangle - 2\langle q_1q_2, Q_2\overline{Q_1}\rangle + \langle Q_2, Q_2\rangle\langle Q_1, Q_1\rangle \\
&\qquad + \langle q_2, q_2\rangle\langle Q_1, Q_1\rangle + 2\langle q_2Q_1, \overline{q_1}Q_2\rangle + \langle q_1, q_1\rangle\langle Q_2, Q_2\rangle \\
&= \langle q_1 + eQ_1, q_1 + eQ_1\rangle\langle q_2 + eQ_2, q_2 + eQ_2\rangle \\
&= (\langle q_1, q_1\rangle + \langle Q_1, Q_1\rangle)(\langle q_2, q_2\rangle + \langle Q_2, Q_2\rangle) \\
&= \langle q_1, q_1\rangle\langle q_2, q_2\rangle + \langle Q_2, Q_2\rangle\langle Q_1, Q_1\rangle + \langle q_1, q_1\rangle\langle Q_2, Q_2\rangle + \langle q_2, q_2\rangle\langle Q_1, Q_1\rangle
\end{aligned}$$

に導く．従って，

$$\langle q_1q_2, Q_2\overline{Q_1}\rangle) = \langle q_2Q_1, \overline{q_1}Q_2\rangle \to \langle (q_1q_2)Q_1, Q_2\rangle = \langle q_1(q_2Q_1), Q_2\rangle$$

となり，結合の法則

$$(q_1q_2)Q_1 = q_1(q_2Q_1) \tag{1.75b}$$

が証明された．$\mathbb{R}$ 上の単位元をもつ非可換な結合的組成代数は四元数である．$\mathcal{A}_1 = \mathbb{H}$ とおけば，$\mathbb{H} + e\mathbb{H}$, $e^2 = -1$ は八元数に同型である．即ち，組成代数は結合的でなければ，$\mathbb{O}$ に一致する．

この $\mathcal{A}_1$ の元を $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ とおけば，(1-47a,b) は $(q, Q) \to (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ などとして，互いに等しくならねばならない．それは，

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 + e'\mathcal{A}_2, (e')^2 = -1 \tag{1.76}$$

とかいたとき，$\mathcal{A}_2$ が結合的で可換であることを意味する．$\mathbb{H} = \mathcal{A}_2 + e'\mathcal{A}_2, (e')^2 = -1$ となる可換で結合的な代数は $\mathcal{A}_2 = \mathbb{C}$ である．この $\mathcal{A}_2$ の元を (x, y) とかいたとき，交換則から

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_2\overline{y_1}, \overline{x_1}y_2 + x_2y_1)$$

$$(x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_1\overline{y_2}, \overline{x_2}y_1 + x_1y_2)$$

が等しくならなければならない．これは，

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 + e''\mathcal{A}_3, (e'')^2 = -1 \tag{1.77}$$

の $\mathcal{A}_3$ が可換で，共役元がもとの元に一致する単位元を持つ組成代数の場合のみ可能である．即ち，$\mathcal{A}_3 = \mathbb{R}$ である．

このようにして，$\mathbb{R}$ 上の単位元を持つ組成代数は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に限るという Hurwitz の定理が証明された．これは，また，平方和の問題 (1.19) は $n = 1, 2, 4, 8$ の場合にのみ解を持つことを意味する．

1.7 Cayley-Dickson の 2 重化法と超複素数系

この節では一般化された Cayley-Dickson の 2 重化法によって得られる超複素数系を考える[19)]．四元数，八元数も超複素数系に入るので，前節までの繰り返しが多くなるが，後に第 7,8 章でスプリット四元数・スプリット八元数という言葉が出てくる関係でその説明を追加するのが目的である．

前節で $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + e\mathcal{A}_1$ という単位元を含む多元環を定義した．これは，$a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1$ として，順序対 (a_1, a_2) を考えることに他ならない (前節の記号を $(q, Q) \to (a_1, a_2)$ に改めた)．このとき，相等 $(a_1, a_2) = (a_1', a_2')$ は $a_1 = a_1', a_2 = a_2'$ で，和は $(a_1, a_2) + (a_1', a_2') = (a_1 + a_1', a_2 + a_2')$ で定義され，実数 α との積は $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) = (a_1, a_2)\alpha$ で与えられる．$\mathcal{A}_1$ の単位元を e_0 とし，$\mathcal{A}_1$ の元 a の共役 $\bar{a}$ は $\overline{a_1 a_2} = \overline{a_2}\,\overline{a_1}$ を満たす．一般化された Cayley-Dickson の 2 重化法は積を

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 - \mu a_4\overline{a_2}, \overline{a_1}a_4 + a_3a_2), \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{1.78}$$

で定義するものである．積法則に μ という実数のパラメータを含むが，$\mu > 0, = 0, < 0$ の場合がある．$\mu \neq 0$ のときは，$\mu/|\mu|$ を改めて μ とおけば，$\mu = \pm 1, 0$ の場合だけを考えればよい．この場合の順序集合を $\mathcal{A}(\mu)$ という記号で表すことにする．

$$\mathcal{A}(\mu) = \{b = (a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1\} \tag{1.79}$$

前節で見たように，組成代数は $\mathcal{A}(1)$ に限られる．その次元は，$n=1,2,4,8$ で与えられる．多元環 $\mathcal{A}(\mu)$ の単位元を $e_0=(e_0,0)$ で定義し，部分多元環 $\mathcal{A}_1$ を改めて，

$$\mathcal{A}_1=\{(a,0);a\in\mathcal{A}_1\} \tag{1.80}$$

とかく．そこで，

$$e=(0,e_0) \tag{1.81a}$$

とおくと，(1.78) より，

$$e^2=-\mu e_0 \tag{1.81b}$$

が成り立つ．一方，$(0,e_0)(a,0)=(0,ae_0)=(0,a)$ なので，$(a_1,a_2)=(a_1,0)+(0,e_0)(a_2,0)$ により，$\mathcal{A}$ の任意の元は

$$b=a_1+ea_2,\quad a_1,a_2\in\mathcal{A}_1 \tag{1.81c}$$

とかける．この表式を使うと，積法則 (1.78) は

$$(a_1+ea_2)(a_3+ea_4)=(a_1a_3-\mu a_4\overline{a_2})+e(\overline{a_1}a_4+a_3a_2),\quad \mu=\pm1,0 \tag{1.81d}$$

となる．

$\mathcal{A}$ に単位元が存在するので，$b=a_1+ea_2\in\mathcal{A}$ の共役元が次のように定義できる．

$$b=a_1+ea_2\longrightarrow\bar{b}=\overline{a_1}-ea_2 \tag{1.82}$$

実際，このとき，$b+\bar{b}=a_1+\overline{a_1}\in\mathbb{R}$ である．また，

$$N(b)\equiv b\bar{b}=\bar{b}b=a_1\overline{a_1}+\mu a_2\overline{a_2},\quad \mu=\pm1,0 \tag{1.83}$$

が直ちに導かれる．

ここで，$\mathcal{A}_1$ として，組成代数 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ の場合を考える．対応して，$\mathcal{A}(\mu)=\mathbb{C}(\mu),\mathbb{H}(\mu),\mathbb{O}(\mu)$ とおく．

(1) $\mathcal{A}_1=\mathbb{R}$ のときは $\mathcal{A}(\mu_1)=\mathbb{C}(\mu_1),\mu_1=\pm1,0$ で，

$$\mathbb{C}(\mu_1)\ni z=e_0x_0+e_1x_1,\quad x_0,x_1\in\mathbb{R},\quad e_1^2=-\mu_1e_0$$

$$N(z) = z\bar{z} = \bar{z}z = x_0^2 + \mu_1 x_1^2 \tag{1.84a}$$

(i) $\mathbb{C} = \mathbb{C}(1)$ は通常の複素数体.

(ii) $\mathbb{C}(-1)$ の元はスプリット複素数あるいは 2 重数といわれる.

(iii) $\mathbb{C}(0)$ の元は双対数といわれる.

(2) $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}$ のときは $\mathcal{A}(\mu_2) = \mathbb{H}(\mu_2), \mu_2 = \pm 1, 0$ で,

$$\mathbb{H}(\mu_2) \ni q = z_1 + e_3 z_3, \quad z_1, z_3 \in \mathbb{C}, \quad e_3^2 = -\mu_2 e_0$$

$$z_1 = e_0 x_0 + x_2 e_2, \quad z_3 = x_3 e_0 - x_1 e_2, \quad e_2^2 = -e_0, \quad x_\mu \in \mathbb{R}$$

$$q = x_\mu e_\mu, \quad e_1 = -e_3 e_2 = e_2 e_3$$

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = x_0^2 + x_2^2 + \mu_2(x_1^2 + x_3^2) \tag{1.84b}$$

(i) $\mathbb{H} = \mathbb{H}(1)$ は Hamilton の四元数体 (ただし，シンプレクティック表示は (1.36) とは異なる).

(ii) $\mathbb{H}(-1)$ の元は**スプリット四元数**といわれる.

(iii) $\mathbb{H}(0)$ の元は準四元数という名が付いている.

(3) $\mathcal{A}_1 = \mathbb{H}$ のときは $\mathcal{A}(\mu_3) = \mathbb{O}(\mu_3), \mu_3 = \pm 1, 0$ で,

$$\mathbb{O}(\mu_3) \ni X = q + e_7 Q, \quad q, Q \in \mathbb{H}, \quad e_7^2 = -\mu_3 e_0$$

$$q = e_\mu x_\mu, \quad Q = x_{3+i} e_i + x_7 e_0, \quad e_i^2 = -e_0$$

$$x_\mu, x_{3+i}, x_7 \in \mathbb{R}\ (\mu = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3)$$

$$X = x_0 e_0 + \sum_{A=1}^{7} x_A e_A, \quad e_{3+i} = e_7 e_i$$

$$\begin{aligned} N(X) &= X\overline{X} = \overline{X}X = q\bar{q} + \mu_3 Q\overline{Q} \\ &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \mu_3(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2) \end{aligned} \tag{1.84c}$$

(i) $\mathbb{O} = \mathbb{O}(1)$ は八元数.

(ii) $\mathbb{O}(-1)$ の元は**スプリット八元数** といわれる.

(iii) $\mathbb{O}(0)$ の元は準八元数という名が付いている.

上のいずれの場合も，ケース (ii), (iii) では零因子が存在する．すなわち可除多元環ではない超複素数系である．$\mathbb{O}(\mu_3) = \mathbb{O}(1, 1, \mu_3)$ とかけるより一般

の Cayley-Dickson 代数 $\mathbb{O}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ も存在する．これについては文献 19) に譲る．

第 1 章の注および参考文献

1) 代数学の歴史を語る名著の 1 つに，
B. L. van der Waerden 著, '*A History of Algebra*', Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1985),『代数学の歴史——アル–クワリズムからエミー・ネーターへ』，加藤明史訳，現代数学社 (1994).
がある．入門書として，
L. S. Pontrjagin 著, 数学入門双書 5 『数概念の拡張——実数・複素数から 4 元数・多元数まで』，宮本敏男・保坂秀正訳，森北出版株式会社 (1995).
I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov 著，浅野洋監訳・笠原久弘訳,『超複素数入門——多元環へのアプローチ』，森北出版株式会社 (1999)
などがある．なお，以下の記述では，数学的厳密さを追うより，四元数や八元数が代数学で特殊な地位を占めることを強調したい．それ故，代数学の用語の説明は多くを注に回すなどする．

2) 代数学の用語については，
横田一郎著,『群と位相』，裳華房 (1980，第 8 版)；『群と表現』，裳華房 (1977，第 3 版)
I. M. Benn and R. W. Tucker , '*An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*', Adam Hilger, (1987), 補遺 A
山内恭彦，杉浦光夫著,『連続群論入門』，培風館 (1964)
などを参考にして正確を期した．

3) ここで言う多元環とは，algebra (**代数**) のことである．多元環 $\mathcal{A}$ のゼロでない任意の元 a に対して，方程式 $ax = b, ya = b$ が一意的な解 $x, y \in \mathcal{A}$ を持つとき，$\mathcal{A}$ を division algebra という．Kantor-Solodovnikov の本の訳者は division algebra のことを**可除多元環**と呼んでいる．可除多元環では，$ab = 0$ ならば $a = 0$ かまたは $b = 0$ である．なぜなら $ax = 0$ $(a \neq 0)$ は斉次方程式だから，その唯一の解は $x = 0$ であるから ($ya = 0$ $(a \neq 0)$ の唯一解も $y = 0$)．この主張の逆も成り立つ．その証明は例えば，Kantor-Solodovnikov の訳本の pp.78-79 で与えられている．この章で取り扱う単位元をもつ多元環は，1.7 節を除き，すべて division algebras である．Lie 代数，Clifford 代数，行列代数などは，慣例に従って，代数という言葉を使う．

4) ここで，多元環に可除多元環という制限を付ければ，単位元をもつという条件は不要になる．実際，もし，$\mathcal{A}$ が結合的あるいは交代的な可除多元環ならば，必ず単位元を持つ．以下にその証明を文献 1) の Kantor-Solodovnikov の訳本から引用する．定義により，$\mathcal{A}$ が可除多元環とは，方程式 $ax = b$, $ya = b$ が与えられた $a \neq 0, b \in \mathcal{A}$ に対して，一意的な解 x, y を持つことである．いま，$ax = a$ の解を $x = e_0$ とおく：$ae_0 = a$. $a \neq 0$ だから $e_0 \neq 0$. $a = e_0$ とおいて，$e_0e_0 = e_0$ が成り立つ．交代性 (1.7) を使うと，$e_0(e_0a) = (e_0e_0)a = e_0a$，すなわち，$e_0(e_0a - a) = 0$, $e_0 \neq 0$ から $e_0a = a$ を得る．従って，e_0 は $\mathcal{A}$ のすべての元と交換するので，$\mathcal{A}$ の単位元である．$\mathcal{A}$ が結合

的のときには，関係式 $ae_0 = a$ の右から $b \in \mathcal{A}$ を掛けて，結合則を使えば，$(ae_0)b = a(e_0b) = ab$，従って，$a(e_0b - b) = 0$ から，$a \neq 0$ ゆえ $e_0b = b$ が証明され，再び e_0 は $\mathcal{A}$ の単位元であることがわかった．それ故，$\mathcal{A}$ が単位元をもつ多元環であるという仮定を，単に $\mathcal{A}$ は結合的あるいは交代的な可除多元環という仮定におき換えられる．

5) 文献 1) の Kantor-Solodovnikov の本の訳者は**ノルム多元環**と呼んでいるが，この本では，組成代数という呼称を使う．多元環 $\mathcal{A}$ から実数体 $\mathbb{R}$ へのノルム写像 $N : \mathcal{A} \ni a \to |a| \in \mathbb{R}$ は多元環 $\mathcal{A}$ に位相を定義し，$\mathcal{A}$ は位相空間となる．準同型写像 $N(ab) = N(a)N(b)$ の定義された多元環が組成代数 (ノルム多元環) である．後に 1.5 節で，八元数の交代性から組成法則 (1.8) が導け，1.6 節では逆に組成法則から多元環の交代性が導けることを見る．従って，多元環において定義されたノルム写像が準同型であるという仮定は多元環が交代的であるという仮定と等価である (多元環は単位元をもつとして)．結合的多元環，可換な多元環は交代的多元環の部分多元環である．

6) A. Hurwitz, ‘Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen’, (1898). ‘Über die Komposition der quadratischen Formen’, (1923). これらは，‘Mathematische Werke von Adolf Hurwitz’ Basel, Birkhäuser (1963)，pp.565-571，pp.641-666 に再録されている．この第 2 論文は Hurwitz の遺稿が論文集に印刷されたものである．平方和の定理の分かり易い証明は，
L. E. Dickson, ‘On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem’, Annals of Mathematics, **20** (1918), pp.155-171.
にある．Dickson の論文には 8 平方和の問題についての歴史も紹介されている．

7) W. R. Hamilton の四元数発見にまつわる歴史的エピソードは既に多くの文献に詳しい．例えば，四元数発見百周年を記念する論文集，‘A COLLECTION of PAPERS *in memory of* Sir William Rowan Hamilton’, Scripta Mathematica (1945) の中の，C. C. MacDuffee の論文，‘Algebra’s Debt to Hamilton’ (pp.25-35) や F. D. Murnaghan の論文, ‘An Elementary Presentation of the Theory of Quaternions’ (pp.37-49) を参照.
M. J. Crowe, ‘*A Histiry of Vector Analysis*’, Dover (1967).
にも四元数とベクトル解析にまつわる詳しい記述がある．

8) A.-M. Legendre,『数の理論』，高瀬正仁訳，海鳴社 (2007).
この本は Legendre の本 ‘THÉORIE DES NOMBRES’, CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES, PARIS, (1830) の訳である．ここの数論的記述は，
B. L. van der Waerden, ‘Hamilton’s Discovery of Quaternions’, Mathematics Magazine, **49**(1976), pp.227-234.
あるいは，文献 1) の van der Waerden の本による．

9) K. O. May, ‘Impossibility of a division algebra in three dimensional space’, The American mathematical monthly, **73**(1966), pp.289-291.
この論文によれば，実数，複素数以外の如何なる超複素数体系も代数学のすべての法則を満足し得ないことは H. Hankel が最初に証明した (1867) という．

10) この可能性は Hamilton も J. T. Graves 宛の手紙（'The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, vol.3 (1967), pp.106-110 に収められている）の中で,「ij についてはどう取り扱ったらよいだろうか．$\alpha+\beta i+\gamma j$ の形であるのだろうか？」と指摘していて，その上で四元数に進んでいる．また如何にして 3 元数を諦めて 4 元数に進んだかについて記した Hamilton 自身の 1843 年 10 月 16 日付けのノートが上記論文集の pp.103-105 に公にされている．このノートは次の本の第 2 章に和訳されているので，我々にも四元数発見のいきさつを発見者自身による言葉を通して直接知ることができるようになった．
堀源太郎著,『ハミルトンと四元数　人・数の体系・応用』，海鳴社 (2007).

11) Lie 代数や Clifford 代数についての解説書は数えきれないくらい多い．その中で，邦書では，
竹内外史著,『リー代数と素粒子論』，裳華房 (1983)
に懇切丁寧な計算が満載で，利用価値が大きい．

12) 文献 8) Legendre の著書『数の理論』によると，この種の恒等式は Euler に始まり，Lagrange はそれを一般化したという．普通，この恒等式を Lagrange の恒等式という．

13) $Sp(1)$ の任意の元は，(1.41c) で与えられる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ (は 2 つの独立なパラメータで決まる) と回転角 θ の連続関数で与えられる．従って，$Sp(1)$ の任意の元はこれら 3 つの実パラメータの値によって決まり，これらのパラメータの値を動かせば，対応して $Sp(1)$ の元も動く．$Sp(1)$ の元すべてを尽くすパラメータの値の集合をその**パラメータ空間**という．パラメータの間には，仮定からして，$|q|^2=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=\cos^2(\theta/2)+\boldsymbol{n}^2\sin^2(\theta/2)=1$ という関係があるので，$Sp(1)\cong SU(2)$ のパラメータ空間は 3 次元球面 S^3 ($\mathbb{R}^3$ の部分集合で有界閉集合) になる．空間内の任意のループが，その空間の外にでることなく，連続的に 1 点に収縮できるとき，その空間を**単連結**という．だから，$Sp(1)\cong SU(2)$ のパラメータ空間は単連結である．なぜなら，3 次元球面上の任意の閉曲線は必ず，連続変形によって 1 点に縮めることができるからである．

14) $SO(3)$ のパラメータ空間は，3 次元ユークリッド空間内の，原点を中心とする半径 π の球で，球面上の対蹠点は同一視される．なぜなら，原点からパラメータ空間内の 1 点に引いたベクトルを $\theta\boldsymbol{n}$ とすれば，$\boldsymbol{n}$ が回転軸を指定し，ベクトルの大きさ θ が回転角を与える．$\boldsymbol{n}$ 軸周りの角度 θ の回転は $-\boldsymbol{n}$ 軸周りの角度 $2\pi-\theta$ の回転に等しいから，回転角は $0\leqq\theta\leqq\pi$ に制限できる．それ故，球の半径が π となる．しかしながら，本文で述べたように，$\theta=\pi$ のときには，$\pm\boldsymbol{n}$ 軸の周りの回転は同じ回転であるから，球の対蹠点は同一視される．そのため，$SO(3)$ のパラメータ空間である半径 π の球では，球面に全然交わらないか，偶数回交わるループは連続的に 1 点に収縮できるのに対し，球面に奇数回交わるループはこの性質を持たない．このように 2 種類の互いに連続変形によっては，移り変われないループがある場合，**2 重連結**という．あるいは，これを次のように言い換えてもよい．ある回転 R はパラメータ空間内の点 R に対応する．原点からこの点に至る道には 2 通りある．1 つは，原点から直接その点に到達する場合．いま 1 つは，原点から一旦球面上のある点に行き，その対蹠点から点 R に至る場

合がある．この 2 つの道は連続的には結ばれない．このような性質をもつ 2 重連結のパラメータ空間で定義される関数には，1 価関数と，2 価関数がある．これらの点についての詳しい議論は，
山内恭彦著,『回転群とその表現』, 岩波書店 (1962 第 3 刷).
大貫義郎著,『ポアンカレ群と波動方程式』, 岩波書店 (1976).
にある．なお，一般の連続群 G について言えば，その任意の元を指定するのに必要最小限のパラメータが有限で，r 個のとき，元 $g \in G$ は $g = g(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ のように，r 個の実パラメータの微分可能な連続関数で与えられる．群の演算も微分可能な連続関数で与えられるとする．ゆえに，パラメータの値を連続的に動かせば，元も連続的に動く．このようにして，G のすべての元を覆い尽くすパラメータの値の集合が**パラメータ空間**で，$\mathbb{R}^r$ の部分集合をなす．この部分集合が有界閉集合のときは，群 G はコンパクトであるといい，有界でないときにはノンコンパクトという．このような ***r*-パラメータ Lie 群** G を変換群としてとらえれば，パラメータ $\{t_i\}_{i=1,\cdots,r}$ を持つ無限小変換には Lie 群の無限小生成演算子 $\{X_i\}_{i=1,\cdots,r}$ の線形結合 $X = \sum\limits_{i=1}^{r} t_i X_i$ が対応し，交換関係 $[X_i, X_j] = f^k{}_{ij} X_k$ が成り立つことがわかる．これを Lie の交換関係と呼び，下の添字について反対称な $f^k{}_{ij}$ を**構造定数**と呼ぶ．また，Jacobi の恒等式 $[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0$ が成り立つ．このような元 X の集合は r 次元ベクトル空間 $\mathcal{G}$ をなし，Lie 代数と呼ばれる．このベクトル空間の計量テンソルは $g_{ij} = f^l{}_{im} f^m{}_{jl}$ で与えられ，$f_{ijk} = g_{il} f^l{}_{jk}$ は添え字に関して完全反対称であることが知られている．また，Lie 群 G がコンパクト・ノンコンパクトであるときの構造定数の性質も知られている．例えば，G がコンパクトのときには，$g_{ij} = -\delta_{ij}$ とおけるなど．抽象的な Lie 群では行列演算が利用できないが，本書では，行列演算のできる具体的な線形 Lie 群を取り扱う．既に出てきた線形 Lie 群 $SO(3), SO(4), Sp(1), SU(2)$ に対しては，各々$r = 3, 6, 3, 3$ で，いずれもコンパクトである．線形 Lie 群の定義については，次章注 5) を参照のこと．

15) 多重連結な群 G の普遍被覆群 $\overline{G}$ とは，G と局所同型な単連結群を言う (局所同型とは，$\overline{G}$ の単位元の近傍から G の単位元の近傍への同型写像が存在することを言う．互いに局所同型な群は同じ Lie 代数を持つ)．このとき，準同型写像 $\overline{G} \to G$ の核は $\overline{G}$ の離散不変部分群 N をなし，$\overline{G}/N \cong G$ が成り立つ．ここで，$\overline{G}/N$ は $\overline{G}$ の不変部分群 N による剰余群 で，その元は $[g] = \{gh; g \in \overline{G}, h \in N\}$ である．例えば，G が 2 重連結の場合，$N = \{\pm 1\}$ は 2 元のみからなる離散群である．

16) H. Freudental, ‘Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie’, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, 18 Mei (1951).
2) で引用した横田一郎の著書，次の文献 17) 及び第 8 章 3) で引用する Günaydin-Gürsey の論文など多数．非結合代数に関する教科書も多い．手元にあるものを引用すると，

R. D. Schafer, '*An Introduction to Nonassociative Algebra*', Academic Press (1966).
S. Okubo, '*Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*', Cambridge University (1995).
G.M. Dixon, '*Division algebras : octonions, quaternions, complex numbers, and the algebraic design of physics*', Kluwer Academic Publishers (1994).
F. Gürsey and C-H. Tze, '*On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics*', World Scientific (1996).
J.H. Conway and D.A. Smith 共著，山田修司訳,『四元数と八元数』，培風館 (2006).
文献 1) で引用した Kantor-Solodovnikov の本．さらに，
J.C. Baez, 'The Octonions', Bull. Amer. Math. Soc. **30**(2002), pp.145-205.

17) M. Günaydin, F. Gürsey, 'Quark structure and octonions', J. Math. Phys.**14** (1973), pp.1651-1667.

18) 文献 16) の Freudental の論文や，Schafer, Okubo の本にも Hurwitz の定理の異なる証明がある．以下で組成法則 (1.63) から (1.70g) までの一連の関係式を導く手法は，polarization と呼ばれる．特に，八元数についての詳しい紹介は 16) の Freudental の論文の他，2) で引用した横田一郎,『群と位相』の補遺 (1) にある．ここで採用する証明の論理は 1) で引用した I. L. Kantor-A. S. Solodovnikov の本，16) で引用した J. H. Conway and D. A. Smith の本に従う．この節の解説はとくにこれらの本に多くを負っている．ただ，文献 1) で引用した I. L. Kantor-A. S. Solodovnikov の本では，スカラー積の非退化性 ($\langle a,b\rangle = 0,\ \forall b \in \mathcal{A} \to a = 0$) の使用を巧妙に避けている．その結果，共役 $a \to \bar{a}$ が対合であること，すなわち，この変換が線形で $\bar{\bar{a}} = a$ を満たすのは自明であるが，(1.68) の成り立つことは証明されていない．テキストでは，対合の性質を (1.73a) から (1.73b) を証明する際用いているが，実は不要である．実際，(1.66a) で $\bar{d} = eQ \to d = -eQ, a = q, b = 1$ とおけば，$(eQ)q - \bar{q}(eQ) = 0$ を得るが，(1.73a) を用いて，$(eQ)q = \bar{q}(eQ) = e(qQ)$ が導かれる．これは (1.73b) に他ならない．従って，(1.73) や (1.74) を証明するには対合の性質 (1.68) は不要である．むしろ，(1.68) は組成代数 $\mathcal{A}$ の満たす積法則 (1.74) から直接導ける (八元数の場合の (1.45c)，(1.49e) の証明を参照)．従って，交代的多元環に対する関係式 $\overline{(a,b,c)} = -(a,b,c)$ も八元数の場合に (1.60b) を導いたのと同様に (1.74) から証明できる．

19) L. Sorgsepp and J. L. Lõhmus, '*About Nonassociativity in Physics and Cayley-Graves' Octonions*', Hadronic Journ. **2**(1979), pp.1388-1459.

第 2 章

Lorentz 群とその表現

Einstein の特殊相対性理論によれば，重力を考えない範囲で，Lorentz 変換で結ばれるすべての慣性系において，物理法則は同じ形式で表現されねばならない．従って，重力の影響を考えなければ，量子力学の法則も Lorentz 不変性を満たさねばならない．Lorentz 変換の集合は Lorentz 群と呼ばれる群をなす．この章では斉次 Lorentz 群と非斉次 Lorentz 群 (Poincaré 群) について，次章以降で使う記号の整理を意図しながら復習する．次節で Lorentz 群とは何かを述べた後，第 2 節で固有 Lorentz 群の普遍被覆群が複素数体上の 2 次元特殊線形変換群 $SL(2,\mathbb{C})$ に同型であること，$SL(2,\mathbb{C})$ の表現 (Lorentz 群のテンソルおよびスピノル表現) の具体例として，自明なスカラー表現の他，Weyl 表現，Dirac 表現およびベクトル表現を議論する．第 3 節は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限次元非ユニタリ既約表現一般を求めることに当てる．また，第 4 節では Poincaré 群のユニタリ既約表現を簡単にまとめる．

2.1 Lorentz 群

Einstein の特殊相対性理論では時空のモデルとして，4 次元 Minkowski 時空 M_4 を選ぶ．それは，4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 上の，**Lorentz 計量**または **Minkowski 計量**と呼ばれる不定計量 $(-,+,+,+)$ で特徴づけられた非退化なスカラー積を持つ計量空間 $\mathbb{R}^{1,3}$ である．M_4 の点 (**世界点**) x の座標を $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ と選ぶと*[1]，原点と世界点 x との**世界距離**の自乗

$$x^2 \equiv \langle x, x\rangle = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$$\equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{2.1a}$$

$$-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu \text{ のとき}) \tag{2.1b}$$

はその符号によって，次のように呼ばれる．

$$\begin{cases} x^2 < 0 & \text{時間的 (time-like)} \quad \to x^\mu : \text{時間的ベクトル} \\ x^2 = 0 & \text{光的 (light-like または null-like)} \to x^\mu : \text{光的ベクトル} \\ x^2 > 0 & \text{空間的 (space-like)} \quad \to x^\mu : \text{空間的ベクトル} \end{cases}$$

任意の世界点 x, y の間のスカラー積は

$$\begin{aligned} x \cdot y \equiv \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \end{aligned} \tag{2.2}$$

で与えられる．スカラー積 $x \cdot y \equiv xy$ を不変に保つ変換は線形であることがわかっている[2]．それを，

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.3}$$

とかくと，$\Lambda^\mu{}_\nu$ は条件

$$\langle x', x' \rangle = \langle x, x \rangle, \quad \text{即ち} \quad x'^2 = x^2 \tag{2.4a}$$

から，

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{2.4b}$$

を満たす．これを**斉次 Lorentz 変換** または単に **Lorentz 変換**と呼ぶ．無限小の世界距離の自乗 $dx^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ を不変に保つ最も一般な変換の中で Jacobi の行列 $(\partial x^{\mu\prime}/\partial x^\nu)$ が正則な変換は，$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$，ただし，$\Lambda^\mu{}_\nu$ は (2.4b) を満たす，で与えられ[3]，**非斉次 Lorentz 変換** または **Poincaré 変換**と呼ばれる (従って，Lorentz 変換は Poincaré 変換で $a^\mu = 0$ とおいた特別の場合である)． それが **Poincaré 群**[4]と呼ばれる群をなすことおよびそのユニタリ表現については，第 2.4 節で簡単な紹介をする．$x^{\mu\prime}, x^\mu$ は M_4 に含まれる同一の世界点を異なる座標系 (慣性系) で見たときの座標ベクトルである．(2.4b) は，**対称テンソル**として変換する $\eta_{\mu\nu}$ があらゆる座標系で同じ値を持つことを述べている．この対称テンソルを特に，**計量テンソル**といい，行列で表示すると次のようになる．

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \tag{2.5a}$$

η の逆行列 $\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$ はその成分が

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \eta^{\mu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho},\ \delta^{\mu}{}_{\rho} = \begin{cases} 1 & (\ \mu = \rho \text{ のとき}) \\ 0 & (\ \mu \neq \rho \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.5b}$$

で定義され，η と同じ行列になる．

$$\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \tag{2.5c}$$

座標ベクトル x^{μ} の添字の上げ下げは計量テンソルで行う．

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu}x^{\nu}, \quad x^{\mu} = \eta^{\mu\nu}x_{\nu} \tag{2.6}$$

この場合，x_{μ} は

$$x_{\mu}{}' = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho}\eta^{\rho\sigma}x_{\sigma} \equiv \Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu} \tag{2.7}$$

のように変換する．(2.3) のように変換する 4 つの量 A^{μ} を**反変ベクトル**，(2.7) のように変換する 4 つの量 $A_{\mu} = \eta_{\mu\nu}A^{\nu}$ を**共変ベクトル**という．従って，座標ベクトル $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ は反変ベクトル，$x_{\mu} = (x_0 = -x^0, x_1 = x^1, x_2 = x^2, x_3 = x^3) = (-x^0, \boldsymbol{x})$ は共変ベクトルとして変換する．反変・共変の区別は変換性だけなので，必要なとき以外は単にベクトルという．テンソルも同様だが，テンソルには反変テンソル・共変テンソルの他，混合テンソルもある．

次に，Lorentz 変換が群をなすことを見るために，行列記号を使う．(2.3) を $x' = \Lambda x$ とかくときの行列 $\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ の (μ, ν) 成分は $(\Lambda)_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ であるから，$(\Lambda^T)_{\mu\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$ とかける．すると，(2.4b) は

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{2.8a}$$

という行列方程式になる．実際この式の (ρ,σ) 成分を取ると，$(\Lambda^T\eta\Lambda)_{\rho\sigma} = (\Lambda^T)_{\rho\mu}(\eta)_{\mu\nu}(\Lambda)_{\nu\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma = (\eta)_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$．単位行列 $\Lambda = I = 1_4$ は明らかにこの式を満たす．(2.8a) の行列式を取って，Λ が正則であることがわかるから，逆行列 Λ^{-1} の存在がわかる．そこで，(2.8a) の右から，$\Lambda^{-1}\eta^{-1}$ を掛けて，

$$\Lambda^T = \eta\Lambda^{-1}\eta^{-1} \tag{2.8b}$$

を得る．さらに，この式の左から η^{-1} を右から η を掛けると，

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1}\Lambda^T\eta \tag{2.8c}$$

が得られる．従って，逆行列の (μ,ν) 成分は

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}(\Lambda^T)_{\rho\sigma}\eta_{\sigma\nu} = \eta^{\mu\rho}\Lambda^\sigma{}_\rho\eta_{\sigma\nu} = \Lambda_\nu{}^\mu \tag{2.8d}$$

で与えられる．(2.8c) の転置行列を取って，η, η^{-1} が共に対称行列であることを使うと，

$$(\Lambda^{-1})^T\eta\Lambda^{-1} = \eta \tag{2.8e}$$

が得られるから，逆行列 (2.8c) はまた Lorentz 変換である．Λ_1, Λ_2 が (2.8a) を満たす Lorentz 変換とすれば，その積 $\Lambda_3 = \Lambda_1\Lambda_2$ もまた (2.8a) を満たす Lorentz 変換である．なぜなら，$\Lambda_3^T\eta\Lambda_3 = (\Lambda_1\Lambda_2)^T\eta(\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T\eta\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^T\eta\Lambda_2 = \eta$ が成り立つからである．また Lorentz 変換は行列でかかれ，行列の積は結合則を満たすので，Lorentz 変換の積も結合則を満たす：$\Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) = (\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3$. このようにして，Lorentz 変換は群の条件

(1) 恒等変換 (単位元) $\Lambda = I$ が存在する
(2) Lorentz 変換 Λ の逆変換 Λ^{-1} が存在し，また Lorentz 変換である
(3) Lorentz 変換の積はまた Lorentz 変換である
(4) Lorentz 変換の積は結合則を満たす

を満足することがわかった．これを**斉次 Lorentz 群**または単に **Lorentz 群**といい，L とかく．M_4 の計量が $(-,+,+,+)$ であることから，$L = \{\Lambda \in GL(4,\mathbb{R}); \Lambda^T\eta\Lambda = \eta\} = O(3,1)$ は非コンパクト群である[5)]．つまり，そのパラメータ空間は有界でない．それに対して，回転群 $SO(3)$ や $SO(4)$ はコンパクト群で，そのパラメータ空間は有界閉集合である．

Lorentz 群 L に含まれるすべての元が連続的に結ばれるわけではない．すなわち，任意の 2 つの Lorentz 変換, Λ_1, Λ_2 が連続な Lorentz 変換 $\Lambda(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, によって，$\Lambda(0) = \Lambda_1$, $\Lambda(1) = \Lambda_2$ となるとは限らない．そのことを見るために，まず，条件 (2.8a) の行列式を取れば，

$$\det \Lambda = \pm 1$$

を得る．行列式の値は行列要素の連続関数なので，行列式が $+1$ のものと -1 のものは，連続的には結ばれない．次に， (2.4b) で $\rho = \sigma = 0$ とおけば，$-(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = -1$ から $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geqq 1$ が示せるので，

$$\Lambda^0{}_0 \geqq 1 \quad \text{または} \quad \Lambda^0{}_0 \leqq -1$$

となる．$\Lambda^0{}_0$ もパラメータの連続関数なので，これらのローレンツ変換もまた，連続的には結ばれない．

以上の結果，Lorentz 群 L は 4 つの連結成分を持つことがわかる．即ち，一般な Lorentz 変換は次のように分類できる．

$$\text{一般 Lorentz 変換}\begin{cases} \text{本義} & \begin{cases} \text{順時的 } \Lambda^0{}_0 \geqq 1, \det\Lambda = 1 & (L^{\uparrow}_{+}) \\ \text{逆順時的 } \Lambda^0{}_0 \leqq -1, \det\Lambda = 1 & (L^{\downarrow}_{+}) \end{cases} \\ \text{非本義} & \begin{cases} \text{順時的 } \Lambda^0{}_0 \geqq 1, \det\Lambda = -1 & (L^{\uparrow}_{-}) \\ \text{逆順時的 } \Lambda^0{}_0 \leqq -1, \det\Lambda = -1 & (L^{\downarrow}_{-}) \end{cases} \end{cases}$$

各々が**連結**であること，つまり，Λ_1, Λ_2 が共に上の連結成分のどれか 1 つに属するときには，その連結成分に属する連続な Lorentz 変換 $\Lambda(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, が存在して，$\Lambda(0) = \Lambda_1$, $\Lambda(1) = \Lambda_2$ となることは後に証明する．単位元 I を含む連結成分 $L^{\uparrow}_{+}$ に含まれる Lorentz 変換の集合は群をなす．これは**固有 Lorentz 群**とも**狭義 Lorentz 群**とも呼ばれる．この本では，固有 Lorentz 群という呼び名を使う (部分群 $L_{+} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{+}$ を固有 Lorentz 群と呼んでいる教科書もある．他の部分群に，$L_{\uparrow} = L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\uparrow}_{-}, L^{\uparrow}_{+} \cup L^{\downarrow}_{-}$ がある)．$L^{\uparrow}_{+}$ が群をなすことは，次のことからわかる．

$$(1)\quad \Lambda = I \in L_+^\uparrow \tag{2.9a}$$

$$(2)\quad \Lambda^{-1}\ \text{が存在して},\det(\Lambda^{-1}) = \det(\eta^{-1}\Lambda^T\eta) = 1,$$

$$(\Lambda^{-1})^0{}_0 = (\eta^{-1}\Lambda^T\eta)^0{}_0 \geqq 1 \tag{2.9b}$$

$$(3)\quad \overset{(1)}{\Lambda} \in L_+^\uparrow,\ \overset{(2)}{\Lambda} \in L_+^\uparrow\ \text{ならば},\ \Lambda = \overset{(2)}{\Lambda}\ \overset{(1)}{\Lambda} \in L_+^\uparrow \tag{2.9c}$$

$$(4)\quad \text{結合則は明らかに成り立つ} \tag{2.9d}$$

このうち，(2.9c) を示すには，$\det\Lambda = \det(\overset{(2)}{\Lambda})\cdot\det(\overset{(1)}{\Lambda}) = 1$ の他に，$\Lambda^0{}_0 = (\overset{(2)}{\Lambda}\ \overset{(1)}{\Lambda})^0{}_0 \geqq 1$ を証明せねばならない．そのためには，Schwarz の不等式を使う．

$$\left|\sum_i \overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_i \overset{(1)}{\Lambda}{}^i{}_0\right| \leqq \sqrt{\left[\sum_i (\overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_i)^2\right]\left[\sum_i (\overset{(1)}{\Lambda}{}^i{}_0)^2\right]}$$
$$= \sqrt{\left((\overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_0)^2 - 1\right)\left((\overset{(1)}{\Lambda}{}^0{}_0)^2 - 1\right)} < \left|\overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_0\ \overset{(1)}{\Lambda}{}^0{}_0\right|$$

すると，$\Lambda^0{}_0 = \sum_i \overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_i \overset{(1)}{\Lambda}{}^i{}_0 + \overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_0 \overset{(1)}{\Lambda}{}^0{}_0$ の符号は $\overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_0 \overset{(1)}{\Lambda}{}^0{}_0$ の符号に等しいことがわかる．ところが仮定により，$\overset{(2)}{\Lambda}{}^0{}_0 \overset{(1)}{\Lambda}{}^0{}_0 \geqq 1$ なので，$(\Lambda^0{}_0)^2 \geqq 1$ を考慮すると，$\Lambda^0{}_0 \geqq 1$ が結論される．

行列 Λ は 16 個の要素を持つが，それらの間には，10 個の条件 (2.4b) があるから，固有 Lorentz 群は 6 パラメータの群である．

空間反転

$$\begin{cases} x^i \to -x^i \quad (i = 1, 2, 3) \\ x^0 \to x^0 \end{cases} \tag{2.10a}$$

は $L_-^\uparrow$ に属する Lorentz 変換の行列

$$\Lambda_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10b}$$

に対応する．従って，$L_-^\uparrow$ に属する任意の Lorentz 変換は $L_+^\uparrow$ に属する Lorentz 変換に Λ_s をかけて得られる．それ故，$L_+^\uparrow$ が連結ならば，$L_-^\uparrow$ も連結である．一方時間反転

$$\begin{cases} x^i \to x^i \quad (i = 1, 2, 3) \\ x^0 \to -x^0 \end{cases} \tag{2.10c}$$

は連結成分 $L_-^\downarrow$ に属する Lorentz 変換の行列

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10d}$$

に対応する．ゆえに，$L_-^\downarrow$ に属する任意の Lorentz 変換は $L_+^\uparrow$ に属する Lorentz 変換に Λ_t をかけて得られる．また，時間・空間全反転

$$x^\mu \to -x^\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{2.10e}$$

は連結成分 $L_+^\downarrow$ に属する Lorentz 変換の行列

$$\Lambda_{st} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10f}$$

に対応する．ゆえに，$L_+^\downarrow$ に属する任意の Lorentz 変換は $L_+^\uparrow$ に属する Lorentz 変換に Λ_{st} をかけて得られる．$L_-^\uparrow$ のときと同様，$L_\pm^\downarrow$ の連結性は $L_+^\uparrow$ の連結性から証明できる．

ところで，$L_+^\uparrow$ の任意の元は

$$\Lambda = RH \tag{2.11a}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (R_{ij}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (R_{ij}) \in SO(3) \tag{2.11b}$$

$$H = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & \boldsymbol{n}\sinh\zeta \\ \boldsymbol{n}^T\sinh\zeta & \delta_{ij} + n_i n_j(\cosh\zeta - 1) \end{pmatrix}, \quad \beta = \tanh\zeta \tag{2.11c}$$

とかける (行列式の値が 1 の実行列に対する極分解に対応する). ただし, ここの $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は Lorentz ブースト (座標系の回転を伴わない純 Lorentz 変換) の方向の単位ベクトルである. また $\beta = \tanh\zeta$ は慣性系の間の相対速度である (c を回復すれば, $v = c\beta$ が相対速度). $(R_{ij}) \in SO(3)$ は連続変形により, 単位元 1_3 に移行し, $\beta \to 0$ の極限で H も単位元 I になる. それ故, $L_+^\uparrow$ の任意の元は, 連続的に単位元 I に変形できるので, $L_+^\uparrow$ は連結である. 参考のため (2.11) の証明を以下に紹介する.

(2.11) の証明

まず (2.11) に現れる R も H も $L_+^\uparrow$ に属する. R については自明だが, ${H^0}_0 = \cosh\zeta \geqq 1$ は明らかで, $\det H = 1, H^T\eta H = \eta$ も容易に確かめられる. 従って, $\Lambda = RH \in L_+^\uparrow$. ところで, (2.11c) の H は次のようにかき直せる.

$$H = R_2^T B R_2$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & \sinh\zeta & 0 & 0 \\ \sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, R_2 は空間回転の行列で, 単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ はそのまま H に現れるが, それに直交し互いにも直交する単位ベクトル $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3), \boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3)$ は α を実数として, $\boldsymbol{l}' = (\cos\alpha)\boldsymbol{l} + (\sin\alpha)\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' = -(\sin\alpha)\boldsymbol{l} + (\cos\alpha)\boldsymbol{m}$ におき換えても良い. そのため, R_2 は $3 - 1 = 2$ 個の独立なパラメータしか含まない. 一方 B は x-軸方向の Lorentz ブーストを記述し, 独立なパラメータは 1 つである. 合計すれば, 丁度 H に

含まれる独立なパラメータの数と一致する．そこで，(2.11b) の R を用いて，$R_1 = RR_2^T$ とおけば，R_1 は空間回転を表す行列で，独立なパラメータは 3 つであるから，

$$\Lambda = R_1 B R_2$$

は全部で 6 個の独立なパラメータを含む．それ故，任意の $\Lambda \in L_+^\uparrow$ が上式のようにかけることを示せば，(2.11) を証明したことになる．

そこで，Wightman[3] に倣ってこの分解を行う．Lorentz 変換 Λ

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

に右から空間回転 R_2^{-1} を施し，ベクトル $(\Lambda^0{}_1, \Lambda^0{}_2, \Lambda^0{}_3)$ がベクトル $\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2}(1,0,0)$ になるようにする (この回転に必要な独立なパラメータは 2 つ).

$$\Lambda R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2} & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda'^1{}_1 & \Lambda'^1{}_2 & \Lambda'^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda'^2{}_1 & \Lambda'^2{}_2 & \Lambda'^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda'^3{}_1 & \Lambda'^3{}_2 & \Lambda'^3{}_3 \end{pmatrix}$$

もし，$\Lambda^0{}_i = 0$ ならば，$\eta^{\mu\nu}\Lambda^0{}_\mu\Lambda^0{}_\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = -1$ から $\Lambda^0{}_0 = 1, \Lambda^i{}_0 = 0$ が得られるので，Λ は既に空間回転を表している．次に，$\Lambda^0{}_i \neq 0$ とする．ここで，ベクトル $(\Lambda'^1{}_2, \Lambda'^2{}_2, \Lambda'^3{}_2)^T, (\Lambda'^1{}_3, \Lambda'^2{}_3, \Lambda'^3{}_3)^T, (\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)^T$ は互いに直交するベクトル (初めの 2 つは単位ベクトル) で左から空間回転 R_1^{-1} を掛けると，3 つの直交するベクトル，$(0,1,0)^T, (0,0,1)^T, \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2} \times (1,0,0)^T$ に変換できる．同時に初めの 2 つのベクトルに直交するベクトル $(\Lambda'^1{}_1, \Lambda'^2{}_1, \Lambda'^3{}_1)$ はベクトル $a(1,0,0)^T$ に変換される．すなわち，

$$R_1^{-1}\Lambda R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2} & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ところが，$R_1^{-1}\Lambda R_2^{-1} \in L_+^\uparrow$ だから $a = \Lambda^0{}_0$ となる．その理由は，

$$\det(R_1^{-1}\Lambda R_2^{-1}) = a\Lambda^0{}_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2} = 1$$

において，$\eta^{\mu\nu}\Lambda^0{}_\mu\Lambda^0{}_\nu = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = -1$ だからである．このようにして

$$R_1^{-1}\Lambda R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2} & \Lambda^0{}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv B$$

は x-軸方向の Lorentz ブーストでパラメータ ζ を用いて，

$$\Lambda^0{}_0 = \cosh\zeta, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2} = \sinh\zeta$$

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & \sinh\zeta & 0 & 0 \\ \sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \tanh\zeta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2}}{\Lambda^0{}_0} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(\Lambda^0{}_i)^2}}{\Lambda^0{}_0}$$

とかける．すなわち，任意の $\Lambda \in L_+^\uparrow$ は $\Lambda = R_1 B R_2$ と分解できる．□

固有 Lorentz 群は連結ではあるが，2 重連結であることが証明できる．実際，(2.11) により，H のパラメータ空間 $\{\zeta\boldsymbol{n}; -\infty < \zeta < \infty\}$ は 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に位相空間として同型であるから，任意の閉曲線はその空間から外に出ることなく，一点に縮めることができるのに対し，$SO(3)$ は 2 重連結であるので，その結果 $L_+^\uparrow$ は単連結ではなく，2 重連結である．従って，回転群と同様，$L_+^\uparrow$ には，テンソル表現の他に，スピノル表現といわれる 2 価表現が存在する．

このことを見るために，固有 Lorentz 群の任意の表現

$$L_+^\uparrow \ni \Lambda \mapsto \rho(\Lambda) \tag{2.12a}$$

を考える．$\rho(\Lambda)$ はある (実または複素) ベクトル空間 V に作用する．それ故，この表現を (ρ, V) とかく．$L_+^\uparrow$ が 2 重連結ということは $L_+^\uparrow$ のパラメータ空間上の連続関数には，1 価関数と 2 価関数があることを意味する．それ故，(2.12a)

の対応が一意的の場合 (これを 1 価表現という) と同一の $\Lambda \in L_+^\uparrow$ に対して，2 つの 1 次変換 $\pm\rho(\Lambda)$ が対応する場合 (これを 2 価表現という) がある．したがって，表現の積には

$$\rho(\Lambda_1)\rho(\Lambda_2) = \pm\rho(\Lambda_1\Lambda_2) \tag{2.12b}$$

とプラス・マイナスの符号が余分に出る．そして，プラスの場合が 1 価表現，±1 の場合が 2 価表現である．言い換えれば，(2.12b) で $\Lambda_1 = \Lambda_2 = I$ とおけば，$\rho(I) = \pm 1$ となるが，$\rho(I) = 1$ のときが 1 価表現，$\rho(I) = \pm 1$ のときが 2 価表現である．ただし，(2.12b) のプラス・マイナスの符号はあくまで群の大域的構造に関したもので，無限小変換の場合はこの符号の存在を気にする必要はない．

この表現の無限小生成演算子を定義するのに，無限小 Lorentz 変換 を

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = -\omega_{\nu\mu},$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad \text{または} \quad \Lambda = I + \omega \tag{2.13}$$

とかく．無限小のパラメータ $\omega_{\mu\nu}$ の反対称性は，$x'^2 = x^2$ を δ の 1 次の項まで計算すれば示される．そこで，

$$\rho(\Lambda = I + \omega) = 1 - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{2.14}$$

によって，Lorentz 群の無限小生成演算子 $\{M_{\mu\nu}\}$ を定義する．これらはすべて表現空間 V に働く線形作用素 (または演算子) である[6)]．固有 Lorentz 群は連続群であるから，その表現は無限小生成演算子 $\{M_{\mu\nu}\}$ の満たす交換関係，つまり Lie 代数の表現を求めればよいことがわかっている．その際，すべての既約表現[7)]を求めればよい．

これらの演算子が満たす交換関係を求めるため，(2.12b) から得られる次の関係式

$$\rho(\Lambda)\rho(I+\omega)\rho^{-1}(\Lambda) = \rho(I + \Lambda\omega\Lambda^{-1}) \tag{2.15a}$$

において，両辺を無限小のパラメータ ω で展開し，(2.14) の定義を使って，

$$\rho(\Lambda)M^{\mu\nu}\rho^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu M^{\rho\sigma} \tag{2.15b}$$

を求めておく．すると，次の不変量が得られる．

$$\rho(\Lambda)F\rho^{-1}(\Lambda) = F, \qquad F \equiv -\frac{1}{8}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$$
$$\rho(\Lambda)G\rho^{-1}(\Lambda) = G, \qquad G \equiv -\frac{1}{32}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} \tag{2.15c}$$

ここで，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は 4 次元の Levi-Civita シンボルで $\varepsilon^{0123} = 1$ とおいた．G の不変性を証明するとき，$\det(\Lambda^{-1}) = 1$ を使った．これらを 2 次の Casimir 演算子という．固有 Lorentz 群の既約表現はこれらの固有値によって指定され，表現空間の基底は，2 つの対角化可能な演算子の固有値によってラベルされることがわかっている．(2.15b) において改めて，$\Lambda = I + \omega$ とおき，再び (2.14) の定義を使うと，ω について 1 次のオーダーで両辺比較して，求める交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = 2(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{2.15d}$$

が得られる．これによって定義される Lie 代数を **Lorentz 代数**と呼ぼう．これは，固有 Lorentz 群の任意の表現に対して満たされるべき関係式であり，それ故逆に，Lorentz 代数 (2.15d) のすべての表現 ρ_* を探すという数学的な問題が生じる．これについて，(2.15a) 上のパラグラフで述べたことをより正確に言えば，表現 ρ_* は固有 Lorentz 群の普遍被覆群 $SL(2,\mathbb{C})$ (次節で述べる) の表現 ρ の微分表現[8)]になっている，すなわち $d\rho = \rho_*$ である．従って，固有 Lorentz 群のすべての (1 価および 2 価) 表現 (ρ, V) を求めることは Lorentz 代数のすべての表現 (ρ_*, V) を求めることに帰着する．

なお，(2.13) の無限小 Lorentz 変換を

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu = -\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(a^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.16a}$$
$$(a^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -2(\eta^{\rho\mu}\eta^\sigma{}_\nu - \eta^\rho{}_\nu\eta^{\sigma\mu}) \tag{2.16b}$$

とかけば，$\{a_{\mu\nu}\}$ は $\{M_{\mu\nu}\}$ と同じ交換関係

$$[a_{\mu\nu}, a_{\rho\sigma}] = 2(\eta_{\mu\rho}a_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}a_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}a_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}a_{\mu\rho}) \tag{2.16c}$$

を満たすことが証明される．言い換えれば，この Lie 代数の表現 ρ_* が (2.15d) なのである．その意味で $\rho_*(a_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu}$ とかいてもよい．しかし，後ほど，(2.15d) の 1 つの表現にベクトル表現 $M_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$ があると言ういい方をする．その場合，正確には $\rho_*(M_{\mu\nu}) = a_{\mu\nu}$ の意味である．今後は (2.15d) の特定の表

現に対しては，いちいち ρ_* という記号は省略し，単に $M_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}$ というような簡明な記法を使う．

交換関係 (2.15d) を記号

$$\begin{cases} J_i = \dfrac{i}{4}\varepsilon_{ijk}M_{jk}, & \boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3) \\ K_i = \dfrac{i}{2}M_{0i}, & \boldsymbol{K} = (K_1, K_2, K_3) \end{cases} \tag{2.17a}$$

を使ってかき直すと，

$$\begin{cases} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} \;= \; i\,\boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{K} \;= \; i\,\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} = -i\boldsymbol{J} \end{cases} \tag{2.17b}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\boldsymbol{J}$ は角運動量の交換関係

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

を簡略化してかいたものである．Lorentz 群の非コンパクト性は，(2.17b) の最後の式の右辺に負号が現れることに見られる．さらに

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}^{(1)} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{K}) \\ \boldsymbol{J}^{(2)} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{K}) \end{cases} \tag{2.17c}$$

とおけば，(2.17b) は

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}^{(a)} \times \boldsymbol{J}^{(a)} = i\boldsymbol{J}^{(a)}, \quad (a = 1, 2) \\ \boldsymbol{J}^{(1)} \times \boldsymbol{J}^{(2)} = 0 \end{cases} \tag{2.17d}$$

と，互いに交換する 2 つの角運動量の交換関係に一致する．それ故，$\boldsymbol{J}^{(a)}$ $(a = 1, 2)$ 従って，$\boldsymbol{J}, i\boldsymbol{K}$ がエルミートな場合は，定義 (2.17a) によって，M^{ij} は反エルミート，M^{0i} はエルミート，従って，表現は非ユニタリになる．この場合は特に $M^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}$ という記号を使う．このとき，${\boldsymbol{J}^{(a)}}^2$ $(a = 1, 2)$ をおのおの対角化して，その固有値を $j_1(j_1 + 1), j_2(j_2 + 1)$ とすれば，$j_1, j_2 = 0, 1/2, 1, \cdots$ となる．従って，スピン角運動量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(1)} + \boldsymbol{J}^{(2)}$ の自乗の固有値 $j(j + 1)$ は，量子力学でよく知られているように，

$$|j_1 - j_2| \leqq j \leqq j_1 + j_2$$

を満足する．この表現は $D^{(j_1, j_2)}$ とかかれ，その次元は，$(2j_1+1)(2j_2+1)$ である．今後，この表現をスピン j の表現というときは，$j = j_1 + j_2$ の意味と理解されたい．表現 $D^{(j_1, j_2)}$ が既約であること，かつ $2(j_1+j_2)$ が偶数のとき 1 価表現で，奇数のとき 2 価表現になることは，第 2.3 節で一般的に証明する．

(2.15c) の Casimir 演算子は

$$F = 2(\boldsymbol{J}^{(1)2} + \boldsymbol{J}^{(2)2}), \quad G = -i(\boldsymbol{J}^{(1)2} - \boldsymbol{J}^{(2)2})$$

となるが，その固有値は普通

$$F = \kappa^2 + j_0^2 - 1, \quad G = -i\kappa j_0$$

とかかれる．有限次元表現の場合は，

$$j_0 = j_1 - j_2, \quad \kappa = j_1 + j_2 + 1$$

$$j = |j_0|, |j_0| + 1, |j_0| + 2, \cdots, |\kappa| - 1$$

である (j_0 と κ の符号を同時に変えても，表現は同値)．

それに対して，$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ 共にエルミートな，従って，$M^{\mu\nu}$ がすべて反エルミートになるユニタリ表現は自明な 1 次元表現を除いてすべて無限次元である．無限次元表現では，$j = j_0, j_0+1, \cdots, \infty$ となる．κ は 0 を含む純虚数で，$2j_0 = 0, 1, 2, \cdots$ の場合 (これを主系列という) と $0 < \kappa^2 < 1$ ($\mathrm{Im}\,\kappa = 0$) で $j_0 = 0$ の場合 (これを副系列という) があるが，これらの無限次元表現は以下考えない．なお，$\kappa = \pm 1, j_0 = 0 \to F = G = 0$ が 1 次元のユニタリ表現に対応する[9])．

2.2　固有 Lorentz 群とスピノル

この節では，$L_+^\uparrow$ の普遍被覆群 $\overline{SO}(3,1)$ が $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}); \det A = 1\}$ に同型であること，Lorentz 群の 2 次元のスピノル表現と呼ばれる，$SL(2,\mathbb{C})$ の異値既約な基本表現が 2 種あること，それらから 4 成分 Dirac スピノルが定義されることを見よう．

そのための標準的な方法は，単位行列を含む Pauli 行列

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

を用いて，M_4 の世界点の座標ベクトル x^μ を 2×2 のエルミート行列に対応させることにある．

$$x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x}) \mapsto X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

この行列式 $\det X = -x^2$ は不変量 (2.4a) であるから，X のエルミート性と行列式の値を変えない変換

$$X \to X' = AXA^\dagger, \quad A \in SL(2, \mathbb{C}) \tag{2.20}$$

は次式で定義される Lorentz 変換，$x \to x' = \Lambda(A)x$，

$$\Lambda(A)^\mu{}_\nu \sigma_\mu = A\sigma_\nu A^\dagger \tag{2.21a}$$

を与える．この式の複素共役を取ったものに左から行列

$$\varpi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21b}$$

を掛け，右からはその逆行列を掛けると，$A \in SL(2, \mathbb{C})$ に対し，$\varpi A \varpi^{-1} = A^{T\,-1}$ となることに注意すれば，

$$\Lambda(A)^\mu{}_\nu \overline{\sigma}_\mu = A^{\dagger\,-1} \overline{\sigma}_\nu A^{-1} \tag{2.21c}$$

を得る．ただし，$\overline{\sigma}_\mu = \varpi(\sigma_\mu)^* \varpi^{-1}$，即ち，

$$\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i) \equiv (\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}), \quad \text{に対し，} \quad \overline{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i) \equiv (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{2.21d}$$

とおいた．このように，行列 ϖ を用いて，(2.21a) から (2.21c) を得る方法を今後 ϖ **算法**ということにする．その結果，Lorentz 変換 $\Lambda(A)$ の行列要素を二通りの方法で表すことができる．

$$\Lambda(A)^\mu{}_\nu = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\overline{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^\dagger] = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[A^{\dagger\,-1}\overline{\sigma}_\nu A^{-1}\sigma^\mu] \tag{2.21e}$$

その際，次の公式のうち，(i) を用いた．

(i) $\mathrm{tr}\,[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu}, \quad \sigma^\mu = \eta^{\mu\nu}\sigma_\nu, \quad \overline{\sigma}^\mu = \eta^{\mu\nu}\overline{\sigma}_\nu$

(ii)　$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = -2\eta^{\mu\nu} = \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu$

(iii)　$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\delta} = -2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2)$

(iv)　$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2)$

(v)　$\mathrm{tr}\,[\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma] = 2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) - 2i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},$

$$\varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{0123} = -1$$

以下でこの公式を引用するときは，単に Pauli 行列の公式 (i)–(v) として引用する．$\Lambda = \Lambda(A)$ は $L_+^\uparrow$ に属する Lorentz 変換である．対応 $A \mapsto \Lambda(A) \in L_+^\uparrow$ は 2:1 である．

$$\Lambda^\mu{}_\nu(A_1)\Lambda^\nu{}_\rho(A_2) = \Lambda^\mu{}_\rho(A_1A_2), \quad \forall A_1, A_2 \in SL(2,C) \tag{2.22a}$$

$$\det\Lambda(A) = +1 \tag{2.22b}$$

$$\Lambda^0{}_0(A) \geqq 1 \tag{2.22c}$$

$$\Lambda(-A) = \Lambda(A) \tag{2.22d}$$

準同型性 (2.22a) は $\Lambda^\mu{}_\nu(A_1A_2)\sigma_\mu = (A_1A_2)\sigma_\nu(A_1A_2)^\dagger = A_1[\Lambda^\rho{}_\nu(A_2)\sigma_\rho]A_1^\dagger = \Lambda^\rho{}_\nu(A_2)\Lambda^\mu{}_\rho(A_1)\sigma_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho(A_1)\Lambda^\rho{}_\nu(A_2)\sigma_\mu$ から求まる．(2.22b) は (2.21a,c) を用いて，(2.4b) に注意すれば，公式 (v) から証明できる．あるいは，$\Lambda(A)$ は A の連続関数で，$\Lambda(1_2)^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu$ の行列式が 1 であることからも言える．(2.22c) は $2\Lambda^0{}_0 = \mathrm{tr}\,AA^\dagger > 0$ でかつ $(\Lambda^0{}_0)^2 \geqq 1$ ゆえ．(2.22d) は，(2 次の) エルミート行列 X に対して，$A_1XA_1^\dagger = A_2XA_2^\dagger$ が成り立つのは，$A_1 = \pm A_2$ の場合に限ることを見ればよい．この式は，$B = A_2^{-1}A_1$ に対し，$BXB^\dagger = X$ を意味するが，ここで，$X = 1_2$ とおけば，B がユニタリ行列であることがわかり，従って，$BXB^\dagger = X \to BX = XB$，すなわち B は任意のエルミート行列と可換であることが導かれるから，一般に複素数の b を用いて，$B = b\sigma_0$, $|b| = 1$ とかける．両辺の行列式を取れば，$B \in SL(2,\mathbb{C})$ より，$\det B = 1$，従って，$b^2 = 1 \to b = \pm 1$ となる．

任意の正則な複素行列がユニタリ行列と正値エルミート行列の積にかけるのはよく知られた事実である．従って，$A \in SL(2,\mathbb{C})$ は必ず $A = UP$，ただし，$U \in SU(2)$, P は行列式が 1 の正定値エルミート行列，とかける (これを極分解という)．$SU(2)$ は単連結で，P の集合は部分群をなさないが，そのパラメー

タ空間は単連結，すなわち，P を連続的に単位行列 1_2 に持って行けるので，$SL(2,\mathbb{C})$ は単連結である．つまり，$SL(2,\mathbb{C})$ は固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ の普遍被覆群である．それ故，Lorentz 群のすべての連続な表現を求めるには，$SL(2,\mathbb{C})$ のすべての連続な 1 価表現

$$SL(2,\mathbb{C}) \ni A \mapsto T(A) \tag{2.23a}$$

$$T(A_1)T(A_2) = T(A_1A_2) \tag{2.23b}$$

を求めればよい．固有 Lorentz 群の 1 価表現は $T(-A) = +T(A)$ の場合に，2 価表現は $T(-A) = -T(A)$ の場合に対応する[10)]．

ここで，いくつかの代表的な表現について述べよう．

スカラー表現

最も簡単なテンソル表現は，$T(A) = 1$ の場合に相当するスピン 0 の表現 ($J^{\mu\nu} = 0$) で，スカラー表現と呼ばれる．表現空間の基底 ϕ は 1 成分で，Lorentz 変換のもとで，スカラーとして変換する．

$$\phi \to \phi' = \phi, \quad \phi \in \mathbb{R} \text{ または } \mathbb{C} \tag{2.24}$$

スピノル表現

これは $T(A) = A$ または $T(A) = A^{\dagger\,-1}$ の場合に相当するスピン 1/2 の表現である 2 次元複素表現で，共に $T(-A) = -T(A)$ を満たすので，固有 Lorentz 群の 2 価表現である．これらは同値な表現ではない．もし同値だとすれば，A と $A^{\dagger\,-1}$ を結ぶ正則な行列 B が存在し，$BAB^{-1} = A^{\dagger\,-1}$ が成り立つ．両辺のトレースを取れば，$\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,A^{\dagger\,-1}$ となる．$SU(2)$ に属する A はこれを満たすが，一般の $A \in SL(2,\mathbb{C})$ はこの関係を満たさない．$SL(2,\mathbb{C})$ のすべての元と可換な行列は単位行列に比例するから，Schur のレンマ[11)]により，これらは既約表現であることがわかる．

他の 2 次元表現 $T(A) = A^{T\,-1}, T(A) = A^*$ はこれらに同値な表現である．$A \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，(2.21b) の ϖ を用いると，$A^{T\,-1} = \varpi A \varpi^{-1}$ なので，$T(A) = A$ と $T(A) = A^{T\,-1}$ は同値な表現である．その複素共役をとって，$T(A) = A^*$ と $T(A) = A^{\dagger\,-1}$ は同値な表現である．以上まとめると，2 次元の

異値既約表現は $T(A) = A$ と $T(A) = A^{\dagger\,-1}$ だけである．

そこで，Lorentz 変換 $\Lambda \in L_+^\uparrow$ のもとで，$A = A(\Lambda) \in SL(2, \mathbb{C})$ に従って変換する 2 成分量を次式によって導入する．

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \xi' = \begin{pmatrix} \xi^{1\prime} \\ \xi^{2\prime} \end{pmatrix} = A\xi \tag{2.25}$$

ξ は固有 Lorentz 群の 2 価表現に属する．これを**スピノル**と呼ぶ[12)]．固有 Lorentz 群の 2 価表現

$$\Lambda \in L_+^\uparrow \mapsto A(\Lambda) \in SL(2, \mathbb{C}) \tag{2.26a}$$

は，いま引き続く Lorentz 変換を Λ, Λ'，その合成を $\Lambda'' = \Lambda\Lambda'$ とすれば，(2.21a) から

$$\begin{aligned}(\Lambda'')^\mu{}_\nu \sigma_\mu &= \Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda')^\rho{}_\nu \sigma_\mu = (\Lambda^\mu{}_\rho \sigma_\mu)(\Lambda')^\rho{}_\nu = [A(\Lambda)\sigma_\rho A(\Lambda)^\dagger](\Lambda')^\rho{}_\nu \\ &= A(\Lambda)[(\Lambda')^\rho{}_\nu \sigma_\rho]A(\Lambda)^\dagger = A(\Lambda)A(\Lambda')\sigma_\nu[A(\Lambda)A(\Lambda')]^\dagger \\ &\equiv A(\Lambda'')\sigma_\nu A(\Lambda'')^\dagger\end{aligned}$$

$$A(\Lambda'') = \pm A(\Lambda)A(\Lambda') \tag{2.26b}$$

のように，プラス・マイナスの符号がつくという特徴を持つ．これは (2.12b) のプラス・マイナスの符号が必要な場合に相当する．それ故，(2.11) の形の Lorentz 変換に対しては，

$$\begin{aligned} A(RH) &= \pm A(R)A(H) \equiv \pm UP \\ U &= A(R):\ \text{行列式が 1 のユニタリ行列} \\ P &= A(H):\ \text{行列式が 1 の正値エルミート行列} \end{aligned} \tag{2.26c}$$

となる．これは，(2.11) の形の Lorentz 変換には $\pm A(RH)$，$A(RH) = A(R)A(H)$ が対応するといってもよい．

次に無限小 Lorentz 変換 $\Lambda = I + \omega$ に対応する行列 $A(\Lambda = I + \omega)$ を求める．Pauli 行列の公式 (iii) を使うと，$\sigma_\mu A \overline{\sigma}^\mu = -2(\mathrm{tr}\, A)1_2$ が得られるので，(2.21a) の右から $\overline{\sigma}^\nu$ をかけ，ν について和をとれば，$\det[\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu] = \det[-2A(\mathrm{tr}\, A^\dagger)] = (\det A)(2\mathrm{tr}\, A^\dagger)^2 = (2\mathrm{tr}\, A^\dagger)^2$ ゆえ，一般に Lorentz 変換 $\Lambda \in L_+^\uparrow$ を与えたと

き，対応する $A(\Lambda)$ を求める次の公式

$$A = A(\Lambda) = \pm\frac{1}{N}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}, \quad N = \sqrt{\det\left[\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right]} \tag{2.27}$$

が導かれる[13)]．ただし，$\mathrm{tr}\,A \neq 0$ と仮定した[14)]．無限小 Lorentz 変換 $\Lambda = I + \omega$ に対する $A\ (\Lambda = I + \omega)$ を求める際には $N = 4$ としてよいが，無限小生成演算子の定義 (2.14) から，(2.27) のマイナスの符号をとる必要がある．

$$\begin{aligned} A(I+\omega) &= -(-1_2 + \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}) = (1_2 - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}) \end{aligned} \tag{2.28a}$$

ここで，$\omega_{\mu\nu}$ の反対称性を用いた．従って，ξ に対する無限小 Lorentz 変換の生成演算子は

$$J^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} \tag{2.28b}$$

で与えられる．これを，(2.17a) に代入して，$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{K} = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}$ を得るから，(2.17c) から

$$\boldsymbol{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{J}^{(2)} = 0 \tag{2.28c}$$

が ξ に対して成り立つ．従って，ξ は固有 Lorentz 群の表現 $D^{(1/2,0)}$ に属する．つまり，その表現空間の基底である．

さて，ϖ 算法により，(2.27) から，$\mathrm{tr}\,A^{\dagger} \neq 0$ のとき，

$$A^{\dagger\,-1} = \pm\frac{1}{N'}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\nu}, \quad N' = \sqrt{\det\left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\nu}\right)} \tag{2.29a}$$

が導ける．無限小 Lorentz 変換 $\Lambda = 1 + \omega$ に対しては，再び $N' = 4$ としてよく，

$$\begin{aligned} A^{\dagger\,-1}(1+\omega) &= -(-1_2 + \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}) = (1_2 - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\mu\nu}) \\ \overline{\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}) \end{aligned} \tag{2.29b}$$

となる．

そこで，固有 Lorentz 変換のもとで，$A^{\dagger\,-1}$ に従って変換する 2 成分量

$$\overline{\eta} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{\dot{1}} \\ \overline{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \to \overline{\eta}' = \begin{pmatrix} \overline{\eta}'_{\dot{1}} \\ \overline{\eta}'_{\dot{2}} \end{pmatrix} = A^{\dagger\,-1}\overline{\eta} \tag{2.30}$$

を考えると，その無限小生成演算子は

$$J^{\mu\nu} = \overline{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}) \tag{2.31a}$$

で与えられる．それ故，$\overline{\eta}$ にたいするその 3 次元版は，(2.17a) と (2.17c) によって，$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{K} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}$ から，

$$\boldsymbol{J}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{J}^{(2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.31b}$$

となり，$\overline{\eta}$ は固有 Lorentz 群の表現 $D^{(0,1/2)}$ に属するスピノルであることがわかる．ξ と $\overline{\eta}$ を Weyl スピノルという．

Weyl スピノル ξ と $\overline{\eta}$ からローレンツ・ベクトル $\overline{\eta}^{\dagger}\sigma^{\mu}\overline{\eta}$ および $\xi^{\dagger}\,\overline{\sigma}^{\mu}\xi$ が作れる．実際，Lorentz 変換のもとで，

$$\overline{\eta}^{\dagger\prime}\sigma^{\mu}\overline{\eta}' = (\overline{\eta}^{\dagger}A^{-1})\sigma^{\mu}(A^{\dagger-1}\overline{\eta}) = \overline{\eta}^{\dagger}(A^{-1}\sigma^{\mu}A^{\dagger-1})\overline{\eta} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\overline{\eta}^{\dagger}\sigma^{\nu}\overline{\eta})$$

および

$$\xi^{\dagger\prime}\,\overline{\sigma}^{\mu}\xi' = (\xi^{\dagger}A^{\dagger})\,\overline{\sigma}^{\mu}(A\xi) = \xi^{\dagger}(A^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}A)\xi = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\xi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\nu}\xi)$$

が得られる．両式とも，最後の等式を得るのに，

$$A^{-1}\sigma^{\mu}A^{\dagger-1} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu} \tag{2.32a}$$

$$A^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}A = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\sigma}^{\nu} \tag{2.32b}$$

を用いた．(2.32a) は (2.21a) から，$A^{-1}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\mu}A^{\dagger-1} = \sigma_{\nu}$ となるが，この両辺に $(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\rho}$ を掛けて，$A^{-1}\sigma_{\rho}A^{\dagger-1} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\rho}\sigma_{\nu} = \Lambda_{\rho}{}^{\nu}\sigma_{\nu}$ となることから得られる．(2.32b) は (2.32a) に ϖ 算法を適用すればよい．

Dirac 表現

これは，$T(A) = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{\dagger\,-1} \end{pmatrix}$ とおいた可約[15)]な 4 次元表現で，$T(-A) = -T(A)$ だから，やはり，固有 Lorentz 群の 2 価表現である．Lorentz 群のスピ

ノル表現としては，歴史的には，これが最初に発見されたスピン 1/2 の表現である．表現空間の基底は，Weyl スピノル $\xi, \overline{\eta}$ を用いて定義される 4 成分 Dirac スピノル

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \overline{\eta}_{\dot{1}} \\ \overline{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

である．その Lorentz 変換は，上の $T(A)$ の代わりに，$S(\Lambda)$ という記号を用いるのが習わしになっている：

$$\psi' = S(\Lambda)\psi, \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{\dagger\,-1} \end{pmatrix}, \quad A = A(\Lambda) \tag{2.34}$$

つまり，Dirac スピノルは固有 Lorentz 群の直和表現 $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ に属するスピノルである．無限小 Lorentz 変換に対しては，

$$S(I+\omega) = 1_4 - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$$
$$J^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0_2 \\ 0_2 & \overline{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

となる．Dirac 行列を

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0_2 & i\sigma^\mu \\ i\overline{\sigma}^\mu & 0_2 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

によって定義すれば，Pauli 行列の公式 (ii) から，γ^μ は次の **Dirac の反交換関係**を満たす．

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}1_4 \tag{2.37}$$

これは 16 次元の Clifford 代数を生成する (生成元は単位元と γ^μ の 5 個)．16 個の基底は下の (2.40a) で与えられる．この Clifford 代数を **Dirac 代数**というが，本書ではその生成元である Dirac 行列の満たす反交換関係 (2.37) を Dirac 代数と呼び，その表現を単に Dirac 代数の表現という．これはもちろん Clifford

代数としての表現に他ならない．Dirac が，次章 3.1 節で述べる Klein-Gordon 方程式の‘因数分解’から (2.37) の Dirac 代数を導いたことは有名である．従って，順序としては，Dirac 代数 (2.37) が Dirac 方程式から定義され，その一つの表現として (2.36) を選べると考えるのが論理的である．すなわち，(2.36) は Dirac 代数の表現空間に特定の基底を選んだ場合に相当すると考える．無限小 Lorentz 変換の生成演算子 (2.35) は

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \equiv -\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{2.38}$$

のように Dirac 行列 (2.36) の交換子で与えられる．表現空間の基底を変えれば当然 $S^{\mu\nu}$ も変わってくる．しかし (2.38) の形は変わらない．

なお，Pauli のレンマによれば，Dirac 代数 (2.37) を満たす 2 組の Dirac 行列，γ^μ, γ'^μ，があれば，それらを結ぶ正則な行列 S が存在する[16)]．

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{2.39}$$

この証明のステップの 1 つとして，Dirac 行列 γ^μ と可換な行列は単位行列の定数倍であること，従って，上の 4 次元表現が Dirac 代数の既約表現であることが示される．それが内部自己同型を除いて一意的に決まることを主張するのが Pauli のレンマである．実際，Dirac 行列 γ^μ の積から作られる独立な行列の数 (含単位行列)

$$\begin{aligned} &1_4, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^\nu \ (\mu > \nu), \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \ (\mu > \nu > \rho), \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \ (\mu > \nu > \rho > \sigma) \end{aligned} \tag{2.40a}$$

は合計 16 個ある．それ故，Dirac 代数は位数 $N = 16$ の有限群とみなせる．有限群の表現論から，位数 N は各既約表現の次数の平方をすべての既約表現にわたって和をとったものに等しい．すなわち，

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \tag{2.40b}$$

が成り立つ．n_i は i 番目の既約表現の次数で，いま既約表現は k 個あるとした．ところが，$16 = 4^2$ なので，4 次元表現以外の既約表現は存在しない．

γ'^μ や $S'^{\mu\nu} = -\dfrac{1}{2}[\gamma'^\mu, \gamma'^\nu]$ の作用する Dirac スピノルは明らかに $\psi' = S\psi$

である．今後は，γ^μ と γ'^μ を区別することなく，一般の表示における Dirac 行列を考える．特定の表示を取るときはその旨を断る．Dirac 代数 (2.37) から，γ^0 を反エルミートに選べば，γ^i $(i=1,2,3)$ はエルミートになる：$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$[17]．固有 Lorentz 群のもとで，Dirac スピノルが可約表現に属することが明白な形でわかるのは，(2.34)，(2.35) の場合であり，その場合の Dirac 行列 (2.36) を Dirac 行列の Weyl 表示という．他の表示としてよく使われる標準表示[18]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i1_2 & 0_2 \\ 0_2 & i1_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0_2 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{\alpha} \equiv -\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0_2 & -\boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix} \tag{2.41a}$$

や Majorana 表示[19]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_2 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0_2 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0_2 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0_2 \end{pmatrix} \tag{2.41b}$$

がある．この表示では，すべての γ^μ が実行列で与えられる．

Dirac スピノルの共役 (Dirac 共役) を

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0 \tag{2.42}$$

で定義すると，その Lorentz 変換性は，

$$\overline{\psi}' = \overline{\psi}S^{-1}(\Lambda) \tag{2.43}$$

となる．この変換性を知るには，行列 $S(\Lambda)$ の持つ次の性質を見ればよい．

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{2.44a}$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = -S^{-1}(\Lambda) \tag{2.44b}$$

Pauli のレンマにより，(2.44a) を満たす正則な行列 $S(\Lambda)$ は必ず存在する．なぜなら，条件 (2.4b) により，$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ は γ^μ と同じ交換関係に従うからである．γ^μ に Weyl 表示 (2.36) を用いると，(2.44a) は (2.32a,b) から明らか．(2.44b)

も，Weyl 表示 (2.34)，(2.36) を用いれば簡単に確かめられる．(2.44b) は $S(\Lambda)$ がユニタリでないことを主張しているが，Dirac 共役をエルミート共役とみなせば，(2.43) はあたかも $S(\Lambda)$ がユニタリであるかのように取り扱って良いことを示す．(2.44a,b) は共に任意の表示で成り立つ．実は，(2.43) の証明には (2.44b) だけが必要なのだが，一般の表示で (2.44b) を証明する際，(2.44a) を必要とする[20)]．(2.34) と (2.43) の結果，$\overline{\psi}\psi$ は Lorentz スカラーであるが，$\overline{\psi}\gamma_5\psi$ は擬スカラーとなる．ここで，γ_5 は次のように定義される Dirac 行列で，γ^μ と反可換である．

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = 1_4 \tag{2.45a}$$

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \tag{2.45b}$$

Levi-Civita シンボルを用いた γ_5 の定義から，γ_5 は Lorentz 変換のもとで擬スカラーとして変換することがわかる．

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 S(\Lambda) = (\det\Lambda)\gamma_5 \tag{2.45c}$$

それ故，時間反転を含まない一般の Lorentz 変換のもとで，$\overline{\psi}'\gamma_5\psi' = (\det\Lambda)\overline{\psi}\gamma_5\psi$ となるわけである．同様にして，Dirac スピノル ψ の双 1 次形式 $\overline{\psi}\Gamma\psi$，は $\Gamma = 1_4, \gamma_5, i\gamma^\mu, i\gamma_5\gamma^\mu, \dfrac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$，に対して，時間反転を含まない一般の Lorentz 変換のもとで，スカラー，擬スカラー，ベクトル，擬ベクトル，テンソルとして変換する．特にベクトルは，Weyl 表示では $i\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = -\xi^\dagger\,\overline{\sigma}^\mu\xi - \overline{\eta}^\dagger\,\sigma^\mu\overline{\eta}$ で与えられる．

Dirac スピノルの特別の場合として，Majorana スピノルがある．それは $\xi = \eta$ とおいたケースに相当する．即ち，

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \overline{\xi}_{\dot{1}} \\ \overline{\xi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ -(\xi^2)^* \\ (\xi^1)^* \end{pmatrix} \tag{2.46a}$$

を Majorana スピノルと呼ぶ[21)]．ゆえに，Majorana スピノルは 4 成分の実スピノルである．

$$\chi = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\xi \\ \mathrm{Im}\,\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(\xi + \xi^*) \\ 1/2i(\xi - \xi^*) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi - \varpi\overline{\xi} \\ -i\xi - i\varpi\overline{\xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} S\Psi \tag{2.46b}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & -\varpi \\ -i1_2 & -i\varpi \end{pmatrix} \tag{2.46c}$$

ベクトル表現

これは，$T(A) = \Lambda(A)$ とおいた 4 次元のスピン 1 の表現で，$T(-A) = \Lambda(-A) = \Lambda(A) = T(A)$ だから 1 価表現．表現空間の基底 A^μ は，固有 Lorentz 変換のもとで

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{2.47a}$$

のように変換する．これをベクトルという．時間反転を含まない一般の Lorentz 変換のもとで，

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu\prime} = (\det\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{2.47b}$$

のように変換する擬ベクトルも存在する．ベクトル表現の無限小生成演算子は，

$$J_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}, \quad (a_{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = -2(\eta_\mu{}^\rho \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_\nu{}^\rho) \tag{2.48a}$$

となるから，(2.17a) によって，$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$を計算し，(2.17c) から $\boldsymbol{J}^{(a)}$ $(a = 1, 2)$ を求めると，

$$\boldsymbol{J}^{(1)\,2} = \boldsymbol{J}^{(2)\,2} = \frac{3}{4}\cdot 1_4 \tag{2.48b}$$

が証明され，考えている 4 次元のベクトル表現は $D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ であることがわかる．また，(2.17d) 下にコメントしたように，これがスピン 1 の表現といっても，$j = 0, 1$ を含むことに注意されたい．

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(1)} + \boldsymbol{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S} \end{pmatrix} \tag{2.48c}$$

ただし，$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$，$(S_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$ は交換関係 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S} = i\boldsymbol{S}$ を満たし $\boldsymbol{S}^2 = 2\cdot 1_3$．

2.3　Lorentz 群の有限次元非ユニタリ表現一般

より高次元の表現を求めることは，スピン 3/2 と 2 の表現を除いて，実用性に乏しいが，記述の完全性を期して，ここに紹介するのも全く無駄ではあるまい．とくに，下の (2.51) の結果は重要である．

既に，固有 Lorentz 群の有限次元非ユニタリ表現 $D^{(j_1,j_2)}$ の無限小生成演算子が交換関係 (2.15d) を満たすことは述べた．その表現空間の基底を，固有 Lorentz 変換のもとで，(2.25) のように変換する 2 成分スピノル，ξ^α, $\alpha=1,2$, および，(2.30) のように変換する 2 成分スピノル，$\overline{\eta}_{\dot\alpha}$, $\dot\alpha=\dot 1,\dot 2$ を用いて，

$$\psi^{(m_1)}_{(m_2)}(\xi,\overline{\eta})=\frac{(\xi^1)^{j_1+m_1}(\xi^2)^{j_1-m_1}}{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}}\cdot\frac{(\overline{\eta}_{\dot 1})^{j_2+m_2}(\overline{\eta}_{\dot 2})^{j_2-m_2}}{\sqrt{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}\tag{2.49}$$

のように選ぶ．ここで， 第 2.1 節最後で見たように，$2j_1, 2j_2=0,1,2,\cdots$ である．また，$j_{1,2}$ を固定したとき，$m_{1,2}$ は $m_1=-j_1,-j_1+1,\cdots,j_1$ および，$m_2=-j_2,-j_2+1,\cdots,j_2$ の値を取る．すなわち，$\dim D^{(j_1,j_2)}=(2j_1+1)(2j_2+1)$.

$SL(2,\mathbb{C})$ のもとで，$\xi^\alpha\to\xi^{\alpha\prime}=A^\alpha{}_\beta\xi^\beta, \overline{\eta}_{\dot\alpha}\to\overline{\eta}'_{\dot\alpha}=A_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\eta}_{\dot\beta}$ [22]だから，$\psi^{(m_1)}_{(m_2)}(\xi,\overline{\eta})\to\psi^{(m_1)}_{(m_2)}(\xi',\overline{\eta}')$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の表現になっている．この表現を $T(A)$ とかけば，その行列要素は，$\psi^{(m_1)}_{(m_2)}(\xi',\overline{\eta}')$ を 2 項展開して，

$$\psi^{(m_1)}_{(m_2)}(\xi',\overline{\eta}')=\sum_{m_1',m_2'}T^{m_1m_1'}_{m_2m_2'}(A)\psi^{(m_1')}_{(m_2')}(\xi,\overline{\eta})\tag{2.50a}$$

$$\begin{aligned}T^{m_1m_1'}_{m_2m_2'}(A)=&\sum_r\sum_s\frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_1+m_1')!(j_1-m_1')!}}{r!(j_1-m_1'-r)!(j_1+m_1-r)!(r+m_1'-m_1)!}\\&\times\frac{\sqrt{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2')!(j_2-m_2')!}}{s!(j_2-m_2'-s)!(j_2+m_2-s)!(s+m_2'-m_2)!}\\&\times(A^1{}_1)^{j_1+m_1-r}(A^1{}_2)^r(A^2{}_1)^{r+m_1'-m_1}(A^2{}_2)^{j_1-m_1'-r}\\&\times(A_{\dot 1}{}^{\dot 1})^{j_2+m_2-s}(A_{\dot 1}{}^{\dot 2})^s(A_{\dot 2}{}^{\dot 1})^{s+m_2'-m_2}(A_{\dot 2}{}^{\dot 2})^{j_2-m_2'-s}\end{aligned}\tag{2.50b}$$

で与えられ，$T(A_1A_2)=T(A_1)T(A_2)$ が成り立つことがわかる．明らかに

$$\begin{cases}T(-A)=T(A), & 2(j_1+j_2)\text{ が偶数のときは 1 価表現}\\ T(-A)=-T(A), & 2(j_1+j_2)\text{ が奇数のときは 2 価表現}\end{cases}\tag{2.51}$$

という結論が得られる．後ほどこの表現が既約であることを証明するが，非ユニタリであることは，2 項定理を使って，

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\left|\psi_{(m_2)}^{(m_1)}(\xi,\overline{\eta})\right|^2=\frac{1}{(2j_1)!}\frac{1}{(2j_2)!}(|\xi^1|^2+|\xi^2|)^{2j_1}(|\overline{\eta}_{\dot{1}}|^2+|\overline{\eta}_{\dot{2}}|^2)^{2j_2}$$

が Lorentz 不変量でないことに注意すればよい．Lorentz 不変な量は

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\psi_{(m_2)}^{(m_1)*}(\overline{\eta},\xi)\psi_{(m_2)}^{(m_1)}(\xi,\overline{\eta})=\frac{1}{(2j_1)!}\frac{1}{(2j_2)!}(\eta_\alpha\xi^\alpha)^{2j_1}(\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}\overline{\eta}_{\dot{\alpha}})^{2j_2}$$

である．

次に，表現の既約性を証明しよう．そのためには，Schur のレンマにより，すべての $A\in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，行列要素が (2.50b) で与えられる表現行列 $T(A)$ と可換な行列は単位行列に比例することを示せばよい．まず，z-軸周りの角度 θ の回転

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\tag{2.52a}$$

に対する行列 $\pm A(\theta)$ は (2.27) から，

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}e^{\frac{i}{2}\theta}&0\\0&e^{-\frac{i}{2}\theta}\end{pmatrix}\tag{2.52b}$$

で与えられる．対応する行列要素 $T_{m_2m_2'}^{m_1m_1'}(A(\theta))$

$$T_{m_2m_2'}^{m_1m_1'}(A(\theta))=\delta^{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}e^{i\theta(m_1+m_2)}\tag{2.52c}$$

に条件 $TM=MT$ を課すと，

$$e^{i\theta(m_1+m_2)}M_{m_2m_2'}^{m_1m_1'}=M_{m_2m_2'}^{m_1m_1'}e^{i\theta(m_1'+m_2')}\tag{2.52d}$$

従って，

$$M_{m_2m_2'}^{m_1m_1'}=0\quad(m_1+m_2\neq m_1'+m_2'\text{ のとき})\tag{2.52e}$$

となる．次に，z-軸方向のブースト

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & 0 & 0 & -\sinh\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\zeta & 0 & 0 & \cosh\zeta \end{pmatrix} \tag{2.53a}$$

に対する行列 $\pm A(\zeta)$ は (2.27) から，

$$A(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\zeta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\zeta}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.53b}$$

で与えられる．これに対する行列要素

$$T^{m_1 m_1'}_{m_2 m_2'}(A(\zeta)) = \delta^{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} e^{-\zeta(m_1 - m_2)} \tag{2.53c}$$

が条件 $TM = MT$ に従うときは，

$$e^{-\zeta(m_1 - m_2)} M^{m_1 m_1'}_{m_2 m_2'} = M^{m_1 m_1'}_{m_2 m_2'} e^{-\zeta(m_1' - m_2')} \tag{2.53d}$$

が満たされねばならないから，

$$M^{m_1 m_1'}_{m_2 m_2'} = 0 \quad (m_1 - m_2 \neq m_1' - m_2' \text{ のとき}) \tag{2.53e}$$

となる．結局　(2.52e), (2.53e) をあわせると，

$$M^{m_1 m_1'}_{m_2 m_2'} = 0 \quad (m_1 \neq m_1', m_2 \neq m_2' \text{ のとき}) \tag{2.54a}$$

が結論されて，$T(A)$ と可換な行列 M は対角的であることがわかる．すると，今度は，$[T, M] = 0$ の $(j_1, j_2; m_1, m_2)$ 要素を取れば，

$$T^{j_1 m_1}_{j_2 m_2}(A)\{M^{m_1 m_1}_{m_2 m_2} - M^{j_1 j_1}_{j_2 j_2}\} = 0 \tag{2.54b}$$

となるが，

$$T^{j_1 m_1}_{j_2 m_2}(A) = \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!}{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!}} \times (A^1{}_1)^{j_1 + m_1}(A^1{}_2)^{j_1 - m_1}(A_{\dot 1}{}^{\dot 1})^{j_2 + m_2}(A_{\dot 1}{}^{\dot 2})^{j_2 - m_2} \neq 0$$

なる $A \in SL(2, \mathbb{C})$ は必ず存在するから，(2.54b) を $T^{j_1 m_1}_{j_2 m_2}(A) \neq 0$ で割ることができて，最終的に，

$$M^{m_1 m_1}_{m_2 m_2} = M^{j_1 j_1}_{j_2 j_2}, \tag{2.54c}$$

を得る．従って，M は単位行列に比例することが証明できた．ゆえに，表現 $D^{(j_1, j_2)}$ は既約である．

2.4 Poincaré 群のユニタリ既約表現

第 2.2 節で，Lorentz 群の具体的な有限次元表現に関連して，スピン $0, 1/2, 1$ の表現などと述べたが，正確にはスピンは Poincaré 群のユニタリ既約表現として分類される 1 粒子状態の量子数である．量子力学の法則によれば，量子系の物理的状態は (内積を持つ) 複素 Hilbert 空間のベクトル (状態ベクトル，より正確には射線) で表され，重畳の原理が成り立つ．また観測可能量 (オブザーバブル) は Hilbert 空間で働くエルミート作用素 (実数の固有値を持つ) で表現され，2 つの状態間の遷移確率は，対応する状態ベクトルの間の内積の絶対値の自乗で与えられる．相対論的量子力学では，この遷移確率が Poincaré 変換のもとで不変に留まるという対称性を持つ．この不変性が状態の分類，つまり，Poincaré 群のユニタリ既約表現[23)]の分類に導く．この節では，Poincaré 群のユニタリ表現についてごく簡単に復習しよう．

Poincaré 変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ または簡単に $x \to x' = \Lambda x + a$ は**非斉次 Lorentz 群** または **Poincaré 群**と呼ばれる群をなす．実際，Poincaré 変換を (Λ, a) とかくと，

(1) 恒等変換は $(I, 0)$ (2.55a)

(2) Poincaré 変換の積はまた Poincaré 変換 (2.55b)

(3) Poincaré 変換 (Λ, a) の逆変換 $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ が存在 (2.55c)

(4) Poincaré 変換の積は結合則を満たす (2.55d)

が成り立つ．(2.55a) は明らか．(2.55b) については，Poincaré 変換の積が $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ で与えられるので，Lorentz 変換が群をなすことからわかる．(2.55c) はこの積の規則から導かれる．(2.55d) の結合則は，

$$[(\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2, a_2)](\Lambda_1, a_1) = [(\Lambda_3\Lambda_2, \Lambda_3 a_2 + a_3)](\Lambda_1, a_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= ((\Lambda_3\Lambda_2)\Lambda_1, (\Lambda_3\Lambda_2)a_1 + \Lambda_3 a_2 + a_3) \\
(\Lambda_3, a_3)[(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)] &= (\Lambda_3, a_3)[(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)] \\
&= (\Lambda_3(\Lambda_2\Lambda_1), \Lambda_3(\Lambda_2 a_1 + a_2) + a_3)
\end{aligned}
$$

の両式が，$(\Lambda_3\Lambda_2)\Lambda_1 = \Lambda_3(\Lambda_2\Lambda_1)$，$(\Lambda_3\Lambda_2)a_1 = \Lambda_3(\Lambda_2 a_1)$ によって等しいから．このようにして定義される Poincaré 群 $\mathcal{P}$ は Lorentz 群の 6 つのパラメータに a^μ という平行移動のパラメータ 4 つが付け加わって，10 個のパラメータを持つ群である．特に，$\Lambda \in L_+^\uparrow$ のときを**固有 Poincaré 群**と呼び，

$$
\mathcal{P}_+^\uparrow = \{(\Lambda, a); \Lambda \in L_+^\uparrow, -\infty < a^\mu < \infty\}
$$

とかく．

ここで，Poincaré 群 $\mathcal{P}$ が 4 次元推進変換群 T_4 と Lorentz 群 L の半直積であることを説明しておこう．明らかに，$(\Lambda, a) = (1, a)(\Lambda, 0)$ が成り立つので，$\{(1, a); -\infty < a^\mu < \infty\}$ を T_4 と，$\{(\Lambda, 0); \Lambda \in L\}$ を L と同一視すると，各々は Poincaré 群の部分群をなす．Poincaré 変換の積法則から，

$$
\begin{aligned}
(\Lambda, a)(1, a')(\Lambda, a)^{-1} &= (\Lambda, a)(1, a')(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\
&= (\Lambda, \Lambda a' + a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (1, \Lambda a')
\end{aligned}
$$

が得られるので，T_4 は Poincaré 群の正規部分群である．そこで，Poincaré 変換の積法則 $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ を

$$
\begin{aligned}
(1, a_2)(\Lambda_2, 0)(1, a_1)(\Lambda_1, 0) &= [(1, a_2)(\Lambda_2, 0)(1, a_1)(\Lambda_2, 0)^{-1}][(\Lambda_2, 0)(\Lambda_1, 0)] \\
&= [(1, a_2)(1, \Lambda_2 a_1)][(\Lambda_2\Lambda_1, 0)] \\
&= (1, \Lambda_2 a_1 + a_2)(\Lambda_2\Lambda_1, 0) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)
\end{aligned}
$$

とかき直すと，$\mathcal{P}$ は T_4 と L の半直積であることがわかる (半直積の定義は，(1.2) 下 2 番目のパラグラフを参照せよ)．Poincaré 群の正規部分群 T_4 は可換なので，Poincaré 群は半単純でない．

この節の始めに述べたように，量子力学的な自由粒子は，固有 Poincaré 群のユニタリ既約表現によって分類されることがわかっている．ある量子系の状態空間 (複素 Hilbert 空間) に作用する固有 Poincaré 群の連続なユニタリ表現を

$$\mathcal{P}_+^\uparrow \ni (\Lambda, a) \mapsto U(\Lambda, a) \tag{2.56a}$$

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = \pm U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{2.56b}$$

とする (単位元の近傍では，量子系の対称変換群はユニタリ演算子により表現される)．なお，このユニタリ表現の 10 個の生成演算子 $\{P_\mu, M_{\mu\nu}\}$ を，無限小 Poincaré 変換 $(I+\omega, \varepsilon)$ から次のように定義する．

$$U(\Lambda = I + \omega, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu \tag{2.57a}$$

ユニタリ表現に対しては，Lorentz 変換の生成子 $\{M_{\mu\nu}\}$ は反エルミート，平行移動の生成子 $\{P_\mu\}$ はエルミートな演算子である．固有 Lorentz 群と同様，固有 Poincaré 群は連続群なので，その表現はこれらの無限小生成演算子の満たす交換関係の表現で尽くされる．その交換関係を求めるため，(2.15) で行ったと同じ推論をする．まず (2.15a) に対応して，

$$U(\Lambda, a)U(I+\omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(I + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \tag{2.57b}$$

を得る．次に，(2.15b) に対応するものは，

$$U(\Lambda, a)M^{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu[M^{\rho\sigma} + 2i(a^\rho P^\sigma - a^\sigma P^\rho)] \tag{2.57c}$$

$$U(\Lambda, a)P^\mu U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\rho{}^\mu P^\rho \tag{2.57d}$$

となる．このとき，Pauli-Lubánski 演算子

$$W^\mu \equiv \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\rho}P_\sigma \tag{2.58a}$$

を定義すれば，$\det\Lambda = 1$ から得られる関係式 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\alpha{}_\nu\Lambda^\beta{}_\rho\Lambda^\gamma{}_\sigma = \Lambda_\delta{}^\mu\varepsilon^{\delta\alpha\beta\gamma}\,(\delta, \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3)$ を使うと，

$$U(\Lambda, a)W^\mu U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\rho{}^\mu W^\rho \tag{2.58b}$$

が導かれる (W^μ は正確には，擬ベクトルである)．それ故， Poincaré 群に対する不変量は，

$$U(\Lambda, a)C_1U^{-1}(\Lambda, a) = C_1, \quad C_1 \equiv P^\mu P_\mu \tag{2.58c}$$

$$U(\Lambda, a)C_2U^{-1}(\Lambda, a) = C_2, \quad C_2 \equiv W^\mu W_\mu \tag{2.58d}$$

となる．C_1, C_2 が Poincaré 群の Casimir 演算子である．それらの固有値によって，Poincaré 群の既約表現が分類される．さらに，(2.15d) を求めた方法を (2.57c,d) に適用すれば，求める交換関係

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.59a}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = 2(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \tag{2.59b}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = 2(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{2.59c}$$

が得られる．これを **Poincaré 代数**という．(2.59c) はもちろん Lorentz 代数 (2.15d) である．

Poincaré 群は 4 次元時空における変換群なので，時空の各点で定義された関数の集まりに対する表現を考えることができ，その場合の無限小生成演算子は

$$M_{\mu\nu} = -2il_{\mu\nu}, \quad l_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \tag{2.60a}$$

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{2.60b}$$

で与えられる．これらが，(2.59) の交換関係を満たすことは容易にわかる．従って，P_μ は (4 元) 運動量演算子，$M_{\mu\nu}$ は (4 次元的な) 角運動量演算子 (の $-2i$ 倍) という物理的意味を持つ．

さて，(2.59a) によれば，P_μ のすべての成分は互いに交換するから，それらを対角化できる．それ故，$U(\Lambda, a)$ の作用する状態空間の基底として，実数の固有値 k_μ を持つ P_μ の固有状態を選べる．

$$P_\mu|k, C\rangle = k_\mu|k, C\rangle \tag{2.61a}$$

ただし，C は状態を指定するのに必要な他のパラメータを表す．ところで，(2.58c) で見たように $C_1 = P^\mu P_\mu$ は不変量なので，$k^2 = -m^2$ は Poincaré 群の既約表現を指定する定数になる (いま 1 種類の量子力学的粒子のみを考える)．従って，$C = (m^2, \hat{\kappa})$ とかけて，$\hat{\kappa}$ は $m^2 \geqq 0$ のときに必要な k^0 の符号 ε と今ひとつの不変量 C_2 の固有値によって決まる定数 κ を表す．すると，運動量の固有状態 (2.61a) は $m^2 \geqq 0$ のとき，$|k, (m^2, \varepsilon, \kappa)\rangle$ とかけるが，その規格化は Lorentz 不変に選ぶ．例えば，$\varepsilon = +$ のときには，$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ とかけるので，

$$\langle k', (m^2, +, \kappa')|k, (m^2, +, \kappa)\rangle = \delta_{\kappa\kappa'}(2\pi)^3(2k^0)\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{2.61b}$$

とする．また，この場合の完全性の条件は，$\varepsilon = +$ をそのまま残して，

$$\sum_\kappa \int_k |k, (m^2, \varepsilon, \kappa)\rangle\langle k, (m^2, \varepsilon, \kappa)| = 1 \tag{2.61c}$$

となる．以下式を簡略にするため，運動量の固有状態に対しては，必要なときまで，(2.61a) の記号を使う．

さて，

$$U(\Lambda, a) = U(I, a)U(\Lambda, 0) \tag{2.62a}$$

なので，ユニタリ表現 $U(I,a), U(\Lambda, 0)$ を別々に求めればよい．$U(I,a)$ の方は簡単で，(2.61a) から

$$U(I,a)|k, C\rangle = e^{-iP\cdot a}|k, C\rangle = e^{-ik\cdot a}|k, C\rangle \tag{2.62b}$$

となること，かつ，運動量の固有状態 $|k, C\rangle$ には内積が定義されていることに注意すると，上式の $U(I,a)$ は確かにユニタリで，表現

$$U(I, a_1)U(I, a_2) = U(I, a_1 + a_2) \tag{2.62c}$$

になっている．そこで次に，運動量の固有状態に働くユニタリ演算子 $U(\Lambda, 0)$ の具体的な形を求める．そのため，任意の Lorentz 変換を

$$\Lambda = L_{\Lambda k}(L_{\Lambda k}^{-1}\Lambda L_k)L_k^{-1} \equiv L_{\Lambda k}\Lambda_{\mathring{k}} L_k^{-1} \tag{2.63a}$$

と分解する．ここで，L_k^{-1} は任意の運動量 k をある標準的な運動量 $\mathring{k}$ に変換する Lorentz 変換である．

$$L_k^{-1}k = \mathring{k} \tag{2.63b}$$

従って，もちろん $k^2 = (\mathring{k})^2$ である．ここで，状態ベクトルに作用する演算子 $U(L_k^{-1}, 0)$ を

$$|\mathring{k}, C\rangle = U(L_k^{-1}, 0)|k, C\rangle \tag{2.64a}$$

によって定義する．これがユニタリであることは明らかであるが，

$$U(L_k^{-1}, 0)U(L_k, 0) = 1 \tag{2.64b}$$

が $U(L_k^{-1},0)U(L_k,0)|\overset{\circ}{k},C\rangle = U(L_k^{-1},0)|k,C\rangle = |\overset{\circ}{k},C\rangle$ から導ける．さらに，(2.64a) が P_μ の固有値が $\overset{\circ}{k}_\mu$ の固有状態であることは，(2.57d) において，$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ に注意すると，(2.64a) によって，

$$\begin{aligned} P_\mu|\overset{\circ}{k}\rangle &= P_\mu U(L_k^{-1},0)|k\rangle = U(L_k^{-1},0)(L_k^{-1})_\mu{}^\nu P_\nu|k\rangle \\ &= U(L_k^{-1},0)(L_k^{-1})_\mu{}^\nu k_\nu|k\rangle = U(L_k^{-1},0)(L_k^{-1}k)_\mu|k\rangle \\ &= U(L_k^{-1},0)\overset{\circ}{k}_\mu|k\rangle = \overset{\circ}{k}_\mu (U(L_k^{-1},0))|k\rangle) = \overset{\circ}{k}_\mu|\overset{\circ}{k}\rangle \end{aligned} \tag{2.64c}$$

となることからわかる (第 2 の等号は (2.57d) の結果である)．ところで，(2.63a) の $\Lambda_{\overset{\circ}{k}}$，すなわち，

$$\Lambda_{\overset{\circ}{k}} \equiv L_{\Lambda k}^{-1}\Lambda L_k \tag{2.64d}$$

は考えている標準的な運動量 $\overset{\circ}{k}$ を変えない．

$$\Lambda_{\overset{\circ}{k}}\overset{\circ}{k} = \overset{\circ}{k} \tag{2.64e}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} U(\Lambda,0)|k,C\rangle &= U(L_{\Lambda k},0)U(\Lambda_{\overset{\circ}{k}},0)U(L_k^{-1},0)|k,C\rangle \\ &= U(L_{\Lambda k},0)U(\Lambda_{\overset{\circ}{k}},0)|\overset{\circ}{k},C\rangle \end{aligned} \tag{2.65}$$

となるので，ユニタリ表現 $U(\Lambda,0)$ を求めることは，標準的な運動量 $\overset{\circ}{k}$ を持った運動量の固有状態 $|\overset{\circ}{k},C\rangle$ に作用するユニタリ演算子 $U(\Lambda_{\overset{\circ}{k}},0)$ による既約表現を求めることに還元された．$\overset{\circ}{k}$ を変えない Lorentz 変換の集合

$$G_{\overset{\circ}{k}} = \{\Lambda\,\overset{\circ}{k} = \overset{\circ}{k}, \Lambda \in L_+^\uparrow\} \tag{2.66a}$$

は群をなすが，これを $\overset{\circ}{k}$ の**等方群 (isotropy group** または **little group)** と呼ぶ．あるいは，**固定群 (group of stability)** とも呼ぶ．以下，等方群という名に従う．従って，(2.64e) により $\Lambda_{\overset{\circ}{k}} \in G_{\overset{\circ}{k}}$ である．この $\Lambda_{\overset{\circ}{k}}$ を **Wigner 回転**という．まとめると，ユニタリ表現 $U(\Lambda,0)$ を求めることは，等方群のユニタリ表現を求めることに帰着した．そして， Poincaré 群のユニタリ既約表現を尽

くすことは，等方群のユニタリ既約表現を尽くすことに他ならない．このとき，(2.56b) の右辺に現れるプラス・マイナスの符号は最終的に等方群の表現

$$U(\Lambda_{\overset{\circ}{k}},0)U(\Lambda'_{\overset{\circ}{k}},0) = \pm U(\Lambda_{\overset{\circ}{k}}\Lambda'_{\overset{\circ}{k}},0), \quad \Lambda_{\overset{\circ}{k}},\ \Lambda'_{\overset{\circ}{k}} \in G_{\overset{\circ}{k}} \tag{2.66b}$$

に顔を出すことになった．

このようにして， Poincaré 群のユニタリ既約表現を求める問題は，等方群のユニタリ既約表現を求める問題に帰着したわけだが，$\overset{\circ}{k}$ の等方群は $k^2 = -m^2$ の符号によって分類される．ここでは，$m^2 \geqq 0$ の場合のみを取り扱う．各場合に応じて P^μ の固有値である $\overset{\circ}{k}$ の選び方が異なるため，等方群の分類が，(2.58a) によって定義した Pauli-Lubánski 演算子 W^μ を使って行われる．W^μ は運動量演算子 P^μ と直交し，

$$W^\mu P_\mu = 0 \tag{2.67a}$$

Poincaré 群の生成演算子と次の交換関係

$$[M_{\mu\nu}, W_\lambda] = 2(\eta_{\mu\lambda}W_\nu - \eta_{\nu\lambda}W_\mu) \tag{2.67b}$$

$$[P_\mu, W_\nu] = 0 \tag{2.67c}$$

$$[W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma \tag{2.67d}$$

に従う．また，次式も成り立つ．

$$C_2 = W^\mu W_\mu = \frac{1}{8}(M^{\mu\nu}M_{\mu\nu})P^\lambda P_\lambda - \frac{1}{4}M^{\mu\nu}M_{\mu\lambda}P_\nu P^\lambda \tag{2.67e}$$

この式を証明するとき，4 次元の Levi-Civita シンボルの満たす恒等式

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\rho\sigma\delta} = &-\eta^\alpha{}_\rho\eta^\beta{}_\sigma\eta^\gamma{}_\delta - \eta^\alpha{}_\sigma\eta^\beta{}_\delta\eta^\gamma{}_\rho - \eta^\alpha{}_\delta\eta^\beta{}_\rho\eta^\gamma{}_\sigma \\ &+\eta^\alpha{}_\sigma\eta^\beta{}_\rho\eta^\gamma{}_\delta + \eta^\alpha{}_\delta\eta^\beta{}_\sigma\eta^\gamma{}_\rho + \eta^\alpha{}_\rho\eta^\beta{}_\delta\eta^\gamma{}_\sigma\end{aligned}$$

を使った．

$m^2 > 0$ のとき

このときは，一般性を失うことなく，$\overset{\circ}{k}{}^\mu = (m, 0, 0, 0)$ と選べる．この場合の等方群の要素は

$$\Lambda_{\overset{\circ}{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad R \in SO(3) \tag{2.68a}$$

とかけるので，等方群は回転群 $SO(3)$ である．その生成演算子は (2.58a) において，$\boldsymbol{P} = 0$, $P^0 = m$ とおき，

$$W^\mu = (0, \boldsymbol{W}) = m(0, \boldsymbol{J}) \tag{2.68b}$$

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{i}{2}(M^{23}, M^{31}, M^{12}), \quad \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\boldsymbol{J} \tag{2.68c}$$

という交換関係に従う．量子力学でよく知られたように，この交換関係は，回転群 $SO(3)$ またはその普遍被覆群 $SU(2)$ の Lie 代数と同じで，そのユニタリ既約表現は有限次元で，C_2 の固有値

$$C_2 = m^2 \boldsymbol{J}^2 = m^2 s(s+1) \tag{2.68d}$$

によって分類され，[24)] その基底は

$$|\,\overset{\circ}{k}, (m^2, \varepsilon, s; s_z)\rangle, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots;\ s_z = -s, -s+1, \cdots, s \tag{2.68e}$$

とかかれる．ここで，$2s =$ 偶数のときは 1 価表現で，$2s =$ 奇数のときは 2 価表現である．状態ベクトル

$$|k, (m^2, \varepsilon, s; s_z)\rangle = U(L_k, 0)|\,\overset{\circ}{k}, (m^2, \varepsilon, s; s_z)\rangle \tag{2.68f}$$

に作用する Lorentz 群のユニタリ表現は

$$U(\Lambda, 0)|k, (m^2, \varepsilon, s; s_z)\rangle = \sum_{s'_z} |\Lambda k, (m^2, \varepsilon, s; s'_z)\rangle D^{(s)}_{s'_z s_z}(\Lambda_{\overset{\circ}{k}}) \tag{2.68g}$$

となる．ここで，$\Lambda_{\overset{\circ}{k}}$ は (2.64d) で与えられ，$D^{(s)}_{s'_z s_z}(\Lambda_{\overset{\circ}{k}})$ はその表現行列要素である．

<u>$m^2 = 0$ のとき</u>

このときは，一般性を失うことなく，次元を無視して，$\overset{\circ}{k}{}^\mu = (1, 0, 0, 1)$ と選べる．この光的ベクトルを不変に保つ Lorentz 変換は，x, y, θ を実数として，

$$\Lambda_{\overset{\circ}{k}} = T_1(x) T_2(y) R_z(\theta) \tag{2.69a}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.69b}$$

$$T_1(x) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{x^2}{2} & 0 & -x & -\dfrac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 & x \\ \dfrac{x^2}{2} & 0 & -x & 1-\dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix} \tag{2.69c}$$

$$T_2(y) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{y^2}{2} & y & 0 & -\dfrac{y^2}{2} \\ y & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{y^2}{2} & y & 0 & 1-\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix} \tag{2.69d}$$

$$\begin{aligned} T_1(x)T_2(y) &= T_2(y)T_1(x) \\ &\equiv \overline{\Lambda}(x,y) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{x^2+y^2}{2} & y & -x & -\dfrac{x^2+y^2}{2} \\ y & 1 & 0 & -y \\ -x & 0 & 1 & x \\ \dfrac{x^2+y^2}{2} & y & -x & 1-\dfrac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.69e}$$

で与えられる[25]．このとき (2.56b) に現れる 2 価性の因子は z-軸周りの回転の表現にのみ関係する (アーベル群のユニタリ表現は 1 次元である).

$$U(\overline{\Lambda}(x,y),0)U(\overline{\Lambda}(x',y'),0) = U(\overline{\Lambda}(x+x',y+y'),0) \tag{2.70a}$$

$$\begin{aligned} &U(R_z(\theta),0)U(\overline{\Lambda}(x,y),0)U^{-1}(R_z(\theta),0) \\ &= U(\overline{\Lambda}(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta),0) \end{aligned} \tag{2.70b}$$

$$U(R_z(\theta),0)U(R_z(\theta'),0) = \pm U(R_z(\theta+\theta'),0) \tag{2.70c}$$

回転角 θ は $[0,2\pi]$ に限られるが，$\overline{\Lambda}$ に現れる x, y は任意の実数値をとるので，(2.69) の集合は $E(2)$ (2 次元ユークリッド群) と呼ばれる非コンパクトな群をな

す．それ故，そのユニタリ表現は自明な 1 次元表現を除いて，すべて無限次元である．いままでのところ，自然界に実現しているのはこの 1 次元表現だけであることがわかっている．この場合の表現空間の基底は

$$| \mathring{k}, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle, \quad |\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \cdots \tag{2.71a}$$

とかかれ，Poincaré 群のユニタリ表現は

$$|k, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle = U(L_k, 0)| \mathring{k}, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle \tag{2.71b}$$

$$U(\Lambda, 0)|k, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle = U(L_{\Lambda k}, 0)U(R(\theta), 0)| \mathring{k}, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle = e^{i\lambda\theta}|\Lambda k, (0, \varepsilon, \lambda)\rangle \tag{2.71c}$$

で与えられる．λ の値が，(2.71a)のように制限される理由は，(2.70c) から来る．なぜなら，$R_z(4\pi) = R_z(2\pi)$ なので，(2.70c) から $U(R_z(2\pi), 0) = \pm 1$，従って，$e^{2\pi i\lambda} = \pm 1$，が導かれるから．

念のため，$E(2)$ の Lie 代数を求めてこの節を終わる．標準運動量 $\mathring{k}^{\mu} = (1, 0, 0, 1)$ の場合の Pauli-Lubánski 演算子は，

$$\begin{cases} W^0 = \dfrac{i}{2}M_{12} = J_3 \\ W^1 = \dfrac{i}{2}(M_{20} + M_{23}) = J_1 - K_2 \equiv T_1 \\ W^2 = \dfrac{i}{2}(M_{01} + M_{31}) = J_2 + K_1 \equiv T_2 \\ W^3 = J_3 \end{cases} \tag{2.72a}$$

となる．これらの演算子が $E(2)$ の Lie 代数を張る．

$$\begin{cases} [T_1, T_2] = 0 \\ [T_1, J_3] = -iT_2 \\ [T_2, J_3] = iT_1 \end{cases} \tag{2.72b}$$

(J_3, T_1, T_2 すべてエルミート演算子で表現される) ユニタリ表現は，$W^2 = T_1^2 + T_2^2$ の固有値で分類され，その基底は J_3 の固有値で番号づけられる．

$$W^2|\sigma, \lambda\rangle = \sigma|\sigma, \lambda\rangle$$

$$J_3|\sigma, \lambda\rangle = \lambda|\sigma, \lambda\rangle$$

ただし，$|\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$ で，$\sigma > 0$ のとき無限次元表現，$\sigma = 0$ のとき 1 次元表現である．また，1 次元表現のときは，$W_\mu = \overset{\circ}{k}_\mu J_3$ となる．

一方，(2.69) で与えた 4 次元表現はユニタリではない．実際，$R_z(\theta) = e^{i\theta J_3}, T_1(x) = e^{ixT_1}, T_2(y) = e^{iyT_2}$ とかけば，

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かる．ここで，J_3 はエルミートであるが，$T_{1,2}$ はエルミートでない．すなわち，$R_z(\theta)$ はユニタリ行列であるが，$T_1(x), T_2(y)$ はユニタリではない．従って，(2.69) は $E(2)$ の非ユニタリな表現である．

第 2 章の注および参考文献

*1) Minkowski 時空は時間・空間を統一した連続体で，時間座標 t，空間座標 (x, y, z) を用いて，$x^0 = ct$ を時間成分，$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \equiv \boldsymbol{x}$ を空間成分と呼ぶ．以下では，$c = \hbar = 1$ となる**自然単位系**を取る ($\hbar$ は Planck 定数 h を 2π で割ったもの，c は真空中の光速度である)．なお x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は (x^0, x^1, x^2, x^3) の座標成分をまとめて呼んでいるのだが，普通，$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ とかいて，座標ベクトルと呼ぶ．第 1 章 (1.21) 式下で述べたように，ギリシャ文字の添字 μ, ν, ρ, σ は $0, 1, 2, 3$ の値，ラテン文字の添字 i, j, k, l は $1, 2, 3$ の値を取る．また，そこで述べた Einstein の規約を引き続き採用することは言うまでもない．

2) この線形性が Einstein の原論文において証明されていることは周知のことであるが，次のような公理論的証明法もあるので紹介しておく．変換 f は x, x' が M_4 の相異なる 2 点ならば，$f(x) \neq f(x')$ が成り立ち (f は単射)，M_4 の任意の点 y に対して，$f(x) = y$ を満たす $x \in M_4$ が存在する (f は全射) とする．さて，この変換が線形であるとは，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

を意味する．この線形性はスカラー積の非退化性から，すべての $w \in M_4$ に対して

$$\langle \{(\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y)\}, w\rangle = 0$$

が成り立てば導かれる．ところが，仮定により，任意の $w \in M_4$ に対して，$w = f(z)$ となる $z \in M_4$ が存在する．ゆえに，この等式は以下のように成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned}&\langle \{(\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y)\}, w\rangle \\ &= \langle \{(\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y)\}, f(z)\rangle = \langle \alpha x + \beta y - (\alpha x + \beta y), z\rangle = 0\end{aligned}$$

ここで，$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ およびスカラー積の線形性を使った．すなわち，変換 f は線形である．この証明は，

D. Giulini, 'Algebraic and geometric strucrures of Special Relativity', ArXiv: math-ph/0602018 (2006).

の命題 20 にある．

3) 非斉次 Lorentz 変換に関する (非斉次項を含む線形性についての) 代数的証明については，例えば，

H. M. Schwartz, p. 9 および問題 3-6 (b) in 'Introduction to Special Relativity', McGraw-Hill Book Company (1968)

S. Weinberg, p.27 in 'Gravitation and Cosmology', John Wiley & Sons (1972)

を見よ．

4) 非斉次 Lorentz 群を Poincaré 群と呼んだのは Wightman である．

A. S. Wightman, 'L'ínvariance dans la mécanique quantique relativiste', pp.161-226, in "Dispersion Relations and Elementary Particles", Wiley (1960).

この英訳が

瀬藤憲昭, ‘Invariance in Relativistic Quantum Mechanics’ (1966), (未発表)

においてなされている．Lorentz 変換という名は Poincaré の 1906 年論文で始めて使われたという．その論文の英訳が

H. M. Schwartz, ‘Poincaré’s Rendiconti Paper on Relativity. Part I’, American Journal of Physics, **39**(1971), pp.1287-1294.

にある (II, III に続く).

5) 体 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 上の正則な行列の集合が作る群 (一般線形変換群) を $GL(n, K)$ とかく．ただし，n は行列の次数である．とくに，行列式の値が 1 の特殊線形変換群を $SL(n, K)$ とかく．なお，$K = \mathbb{H}$ のときの行列式は一意的ではないが定義されている．第 4.1 節で $n = 2$ の場合を詳述する．$GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分群を**線形 Lie 群**と呼ぶ．線形 Lie 群の Lie 代数 $\mathcal{G}$ は $e^{tX} \in G$ となる X の全体のことである．$K = \mathbb{H}$ 上の線形変換群で，$\mathbb{C}$ 上の線形変換群と同型な線形 Lie 群の例を第 3 章で見る．第 1 章 1.3 節の最後にコメントした例 $U(n, \mathbb{H}) = \{\boldsymbol{A} \in GL(n, \mathbb{H}); \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}_n\} \cong Sp(n)$ は四元数の Pauli 表現を用いる．

6) ベクトル空間 V に働く線形作用素 T とは，$T(u + v) = Tu + Tv$, $T(\alpha u) = \alpha(Tu)$, $u, v \in V$ を満たすような関数 $T(u) \equiv Tu$ のことを言う．V が実ベクトル空間のときは，$\alpha \in \mathbb{R}$, V が複素ベクトル空間のときは，$\alpha \in \mathbb{C}$ である．$\langle u, v\rangle, u, v \in V$ をベクトル空間のスカラー積 (内積) とすれば，$\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle$ を満たす作用素をエルミート作用素，$\langle u, Tv\rangle = -\langle Tu, v\rangle$ を満たす作用素を反エルミート作用素という．作用素のことを演算子とも言う．V が有限次元のときは，作用素は行列で表現できる．従って，エルミート作用素は，エルミート行列で，反エルミート作用素は，反エルミート行列で表現できる．V が無限次元のときは，作用素を無限次元の行列で表現することもできる．なお，スカラー積を保つ作用素 $\langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle$ をユニタリ作用素という．

7) 第 1 章で述べた繰り返しになるが，群 G の表現空間 V の部分空間 W で，$\rho(G)W \subset W$ となるものは $W = V$ か $W = 0$ の場合しかないとき，表現 (ρ, V) を既約という．既約でないとき，可約という．特に，完全可約表現とは，$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots W_n$ が部分空間への直和分解で，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\rho(G)W_i \subset W_i$ で (ρ, W_i) が既約のときをいう．ユニタリ表現は完全可約であることが知られている．ユニタリ表現とは，表現空間 V で定義されたエルミートな複素内積 $\langle u, v\rangle, u, v \in V$(複素ベクトル空間) を変えない表現のことである．すなわち，ユニタリ表現では $\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle = \langle u, v\rangle, u, v \in V, g \in G$ が成り立つ．

8) 線形 Lie 群 G の表現 (ρ, V) に対応する Lie 代数の表現 (ρ_*, V) を ρ の微分表現という．その定義は $e^{tX} \in G$ に対して，$\rho(e^{tX}) = e^{t\rho_*(X)}$ である．ただし，X は Lie 代数の元，$t \in \mathbb{R}$ である．表現 (ρ, V) が既約ならば微分表現 (ρ_*, V) も既約であり，逆も成り立つ．G が単連結な線形 Lie 群のときには，その Lie 代数の任意の表現 (ρ_*, V) は G の表現 (ρ, V) を常にただ 1 つだけ決める．線形 Lie 群 G と G' は，G の単位元の近傍から G' の単位元の近傍への 1:1 の連続な準同型写像が逆とともに存在すると

き，**局所同型**であるという．そのための必要十分条件はそれらの Lie 代数が一致することであることがわかっている．

9) ここでは足早にしか見られなかった Lorentz 群の表現についての詳細は，
I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, '*Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications*', Pergamon Press, Oxford, England (1963).
M. A. Naimark, '*Linear Representions of the Lorentz Group*', Pergamon Press (1964).
を参照されたい．

10) $L_+^\uparrow$ と $SL(2,\mathbb{C})$ は局所同型なので，注 8) で述べたように，同じ Lie 代数を持つ．これが Lorentz 代数 (2.15d) である．さらに，$SL(2,\mathbb{C})$ は単連結 (従って，$L_+^\uparrow$ の普遍被覆群) なので，Lorentz 代数 (2.15d) の任意の表現は $SL(2,\mathbb{C})$ の微分表現になっている．それにより，$SL(2,\mathbb{C})$ のすべての 1 価表現を尽くす．しかしながら，$L_+^\uparrow$ の表現には 1 価表現と 2 価表現が存在する．1 価表現の場合は $T(A)=\rho(\Lambda(A))$ によって $L_+^\uparrow$ の表現 (ρ,V) が一意的に決まる．なぜなら $T(-A)=\rho(\Lambda(-A))=\rho(\Lambda(A))=T(A)$ が成り立つから．これは，$T(-1)=1$ を意味する．それに対して，2 価表現の場合には，$T(-1)=-1$ なので，$T(-A)=T(-1)T(A)=-T(A)$ を満たす $T(A)$ で与えられることになる．
なお，本文では，$SL(2,\mathbb{C})$ が単連結であることの証明を，$SL(2,\mathbb{C})\ni A=UP$ という，よく知られた極分解に基づいて行った．文献 9) の Gel'fand-Minlos-Shapiro の本の p.169 に極分解を用いない証明があるので，ここでそれを紹介しよう．いま，2×2 複素行列の集合 $M(2,\mathbb{C})$ のパラメータ空間は 8 次元であるが，$\det A=0\equiv 0+i0, A\in M(2,\mathbb{C})$ は 2 つの条件からなるため，方程式 $\det A=0$ はこの空間における 6 次元曲面を選ぶ．その次元数は 8 次元空間より 2 次元低いので，もとの 8 次元空間を 2 つの領域に分離することはない．つまり，$A_1=A(0), A_2=A(1)\in GL(2,\mathbb{C})$ を結ぶ連続な道 $A(t)\in GL(2,\mathbb{C})$ で曲面 $\det A=0$ を横切らないようなものが存在する．そこで，$A_1, A_2\in SL(2,\mathbb{C})$ と選べば，$SL(2,\mathbb{C})$ の任意の元は連続な道 $\dfrac{1}{\det A(t)}A(t)\in SL(2,\mathbb{C})$ で結ばれる．それ故，$SL(2,\mathbb{C})$ は単連結である．

11) 表現 (ρ,V) が既約であるとき，すべての表現行列と可換な行列は単位行列に比例することを Schur のレンマという．

12) スピノルの命名は P. Ehrenfest による (朝永振一郎著,『スピンはめぐる』，中央公論社 (1974)，p.199)．スピノル解析を始めた van der Waerden は，論文
B. L. van der Waerden, 'Exclusion Principle and Spin', pp.199-244, *Theoretical Physics in the twentieth century: a memorial volume to Wolfgang Pauli*', M. Fierz および V. F. Weisskopf 編集，Interscience Publishers (1960).
の p.236 において「2 あるいは 4 成分の ψ のような量はベクトルやテンソルと違い物理学者を大いに悩ませた．Ehrenfest はこのような量をスピノル *Spinors* と呼び，

(1929 年夏) Göttingen を訪れたとき，わたし (van der Waerden) に次のように尋ねた,『すべての物理学者がテンソル解析のように学べ，すべての種類のスピノルとそれらが満たす不変方程式が書き下せる，スピノル解析は存在するか？』と述べている．なお，本書では，必要なときのみ，スピノルの成分を表す，$\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$，というスピノル添字を使う．例えば，$\xi$ とかいたら，(2.25) のような 2 成分量であり，$\bar{\eta}$ とかいたら，(2.30) のような 2 成分量であり，ψ とかいたら，(2.33) のような 4 成分量を表す．四元数の計算規則を使う第 4 章以降では ψ という記号は異なる意味を持つことになる．なお，スピノルを最初に導入したのは，Cartan で，その好著

E. Cartan, '*The Theory of Spinors*', Dover Publications, Inc. New York (1966).

は有名である．

13) Wightman，文献 3) によると，この公式は，H. Joos によるという．

14) 無限小変換の場合は，$\mathrm{tr}\, A \neq 0$ であるが，有限の変換に対しては，$\mathrm{tr}\, A = 0$ となることもある．その場合は，(2.21a) の右から σ^ν をかけ，ν について和をとると，Pauli 行列の公式 (iv) を使って，$AA^\dagger = -(1/2)\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \sigma^\nu$ を求める．有限変換の例として，z-軸周りの π だけの回転 $\Lambda_\pi = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, 1) \equiv \Lambda_\pi$ を考えると，対応する $A(\Lambda_\pi) = \pm \mathrm{diag}\,(i, -i)$ となる．恒等変換 I に対しても $A(I) = \pm 1_2$ である．いま，$A(I) = 1_2, A(\Lambda_\pi) = \mathrm{diag}\,(i, -i)$ とおくと，$A(I)A(\Lambda_\pi) = A(I\Lambda_\pi)$，であるのに対し，$A(\Lambda_\pi)A(\Lambda_\pi) = -A(\Lambda_\pi^2) = -A(I)$ である．なぜなら考えている $\Lambda_\pi = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, 1)$ の自乗は単位元 I で，$A(I) = 1_2$ とおいたから．これからも，(2.26b) でプラス・マイナスが必要であることがわかる．

15) 0_2 は 2 次のゼロ行列．なお，$V = W_1 + W_2$ が直和分解で，$\rho(G)W_i \subset W_i$ $(i = 1, 2)$ が成り立ち，$\rho(G)$ の W_i $(i = 1, 2)$ 上の表現 (ρ_i, W_i) が既約のとき，表現 (ρ, V) は**直和表現**であるという．このとき，V に適当に基底を選べば，$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$ とかける．ただし，$(\rho_1, W_1), (\rho_2, W_2)$ の次元をそれぞれ n, m とすれば，この表式の右上の 0 は $n \times m$ ゼロ行列，左下の 0 は $m \times n$ ゼロ行列である．直和表現に分解できる表現は可約である．注 7) も参照のこと．

16) Pauli はこれを Dirac 行列の基本定理と呼んだ．Pauli の原論文

W. Pauli, 'Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac," Ann. Inst. Henri Poincaré 6, no.2, pp.109–136 (1936).

は online で入手できる．Pauli の証明は

R. G. Good, Jr., 'Properties of the Dirac Matrices', Rev. Mod. Phys. **27**(1955), pp.187-211.

において詳細に紹介されている．邦書では，片山泰久が

W. Heitler 著，沢田克郎訳,『輻射の量子論 (下)』，吉岡書店 (1969).

の解説で再録している．

S. S. Schweber, '*An Inroduction to Relativistic Quantum Field Theory*', Harper

and Row (1964).

も Pauli の証明を取り上げている．Dirac 代数 (2.37) の既約表現が 4 次元に限られ，同値を除いて一意的に決まることはいろいろな方法で証明できる．本文では有限群の表現論に触れたが，例えば代数の表現論を使った証明が

P. Roman, '*Theory of Elementary Particles*', North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1964).

に，有限群の表現論を用いた異なる証明が

大貫義郎著,『ポアンカレ群と波動方程式』，岩波書店 (1976)，第 1 章文献 14).

にある．同じ結果を与える Clifford 代数の表現論は簡明な言葉で全体像を把握できるという利点を持つ．

17) $\gamma^{\mu\,\dagger}$ も γ^μ と同じ Dirac 代数 (2.37)を満たすから，Pauli のレンマにより，$\gamma^{\mu\,\dagger} = S\gamma^\mu S^{-1}$ を満たす正則な行列 S が存在する．このエルミート共役を取ると，$\gamma^\mu = S^{\dagger\,-1}\gamma^{\mu\,\dagger}S^\dagger = S^{\dagger\,-1}(S\gamma^\mu S^{-1})S^\dagger = (S^{\dagger\,-1}S)\gamma^\mu(S^{\dagger\,-1}S)^{-1}$ となり，b を任意の複素数として，$S^{\dagger\,-1}S = b1_4$, すなわち，$S = bS^\dagger \to S^\dagger = b^*S = b^*bS^\dagger$ から $|b| = 1$ が導かれ，α を実数として，$b = e^{-2i\alpha}$ とおける．$e^{i\alpha}S$ を改めて S とすれば，$S^\dagger = S$ が得られる (文献 16) の Pauli の論文 §4)．いま，$i\gamma^0$ をエルミートに選ぶと，(2.45) で定義される γ_5 を用いて，$(\gamma^0\gamma_5)^\dagger = \gamma_5^\dagger\gamma^{0\,\dagger} = \gamma_5(-\gamma^0) = \gamma^0\gamma_5$ ゆえ，$S = \gamma^0\gamma_5$ とおけるので，$\gamma^{\mu\,\dagger} = (\gamma^0\gamma_5)\gamma^\mu(\gamma^0\gamma_5)^{-1} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$，従って，$\gamma^\mu = \gamma^0\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^0$ が導ける．ここで，Dirac 代数 (2.37) により，$i\gamma^0$ は自乗すると単位行列になることを使った．従って，Dirac 代数 (2.37) の結果，γ^0 を反エルミートに選べば，必然的に γ^i $(i = 1, 2, 3)$ はエルミートになる (これは有限群の表現はユニタリ表現に同値であること，従って，特に $\mu = 0, 1, 2, 3$ に対して $\gamma^{\mu\,\dagger}\gamma^\mu = 1_4$ と選べることを述べている．今の場合，$(\gamma^0)^2 = -1_4$ なので，γ^0 のユニタリ性は $i\gamma^0$ のエルミート性を意味する)．Dirac 代数 を (2.37) ではなく，$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}1_4$ と選ぶ教科書も多い．このときは，γ^0 をエルミートに選ぶことができて，γ^i $(i = 1, 2, 3)$ は反エルミートになる (今度は，$\gamma^{\mu\,\dagger} = S\gamma^\mu S^{-1}$, $S^\dagger = S$ において，$S = \gamma^0$ と選べる．いずれの記法にも慣れる必要があるが，本書では (2.37) を採用した)．

18) Weyl 表示から，ユニタリ行列 $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & 1_2 \\ -1_2 & 1_2 \end{pmatrix}$ によって得られる．

19) Weyl 表示から，ユニタリ行列 $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & -\varpi \\ -i1_2 & -i\varpi \end{pmatrix}$ によって得られる．

20) 次のような計算

$$
\begin{aligned}
&\gamma^0(S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda))^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0 = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0 \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) \\
&S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)(\gamma^\mu)^\dagger S^{\dagger\,-1}(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu \\
&S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 S^{\dagger\,-1}(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\mu
\end{aligned}
$$

$$(S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0)\gamma^\mu(S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0)^{-1} = \gamma^\mu$$

から，$S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$ が γ^μ と交換することがわかり，それ故，$S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$ は単位行列 1_4 に比例する：$S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = b1_4$，$b$ は定数．比例係数 b は $\gamma^0 S(\Lambda)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = b\gamma^0$ のエルミート共役をとり，実数であることがわかる．さらに $\det S(\Lambda) = 1$ から，$b = \pm 1$ となる．最後に

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,[S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)] &= -\mathrm{tr}\,[S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^0 S(\Lambda)] = b\mathrm{tr}\,[\gamma^0 S^{-1}(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)] = b\mathrm{tr}\,[\gamma^0 \Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu] \\ &= -4b\Lambda^0{}_0 > 0 \quad \because \mathrm{tr}\,[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}\end{aligned}$$

から，順時的 Lorentz 変換に対しては $b = -1$ と決まる．

21) ξ の変換性 $\xi' = A\xi$ からその複素共役は $\xi'^* = A^*\xi^*$ と変換する．それ故，$\varpi\xi'^* = (\varpi A^* \varpi^{-1})\varpi\xi^* = A^{\dagger\,-1}\varpi\xi^*$ となるので，$\xi = \eta$ は $\overline{\xi} = \varpi\xi^*$ を意味する．

22) ただし，$(A)_{\alpha\beta} = A^\alpha{}_\beta$，$(A^{\dagger\,-1})_{\alpha\beta} = A_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$ とおいた．これがスピノル添字の通常のかき方である．$(A)_{\alpha\beta} = A^\alpha{}_\beta$ に対して，複素共役の行列要素を $(A^*)_{\alpha\beta} = A^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ とかくと，$A^{\dagger\,-1} = \varpi A^* \varpi^{-1}$ だから，行列 ϖ の成分をスピノル空間の計量と考えると，$(A^{\dagger\,-1})_{\alpha\beta} = A_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$ となる．

23) E. Wigner, 'On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group', Ann. Math. **40**(1939), pp.149-204. A.S. Wightman, 文献 4).
教科書では，
N .N. Bogoliubov，A. A. Logunov，I. T. Todorov 著，江沢洋，亀井理，関根克彦他訳,『場の量子論の数学的方法』，東京図書 (1972).
大貫義郎，文献 16).
S. Weinberg, 'The Quantum Theory of Fields I', Cambridge Univ. Press (1995).
などに詳しい．本文の記述ではこれらの本を参考にしたところが多い．

24) ここの s が粒子のスピンで，第 2.1 節で述べた，Lorentz 群の非ユニタリ表現に対するスピン角運動量の自乗の固有値，$\boldsymbol{J}^2 = j(j+1)$，の j は一般に粒子のスピンを表すわけではない．

25) (2.69b) の $R_z(\theta)$ は (2.52a) に他ならない．(2.69c,d) の $T_1(x), T_2(y)$ を求めるには，(2.19) の $x^\mu \to \overset{\circ}{k}{}^\mu = (1,0,0,1)$ として得られる 2×2 行列は $\overset{\circ}{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であることに注意する．この Lorentz 変換は (2.20) で与えられるが，いま $\overset{\circ}{k}{}^\mu = (1,0,0,1)$ が不変に保たれる場合を考えているので，$A\overset{\circ}{K}A^\dagger = \overset{\circ}{K}$ が成り立たねばならない．これを満足する A は，(2.52b) の $A(\theta)$ の他，$A(ix) = \begin{pmatrix} 1 & ix \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $A(y)$ が独立な行列である．ただし x, y は実数である．従って，$A\overset{\circ}{K}A^\dagger = \overset{\circ}{K}$ を満足する一般の A はこ

れらの積で与えられる．ところでこれらの A に対応する Lorentz 行列 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は例えば (2.32b) から求められる．$A(\theta)$ は $R_z(\theta)$ に対応する．$A(ix), A(y)$ は，(2.69c,d) の $T_1(x), T_2(y)$ に対応する．

第 3 章

Dirac 理論入門

前章で求めたスカラー，スピノル，ベクトルなどは，相対論的量子力学を建設する上で，基本的な場の変数を提供する．すなわち，それらは，時空座標の関数として，定まった Lorentz 変換則を持ち，然るべき相対論的波動方程式に従う．場の変数は場の量子化を通じて場の演算子になり，粒子・波動の 2 重性を持つ量子力学的粒子の生成・消滅演算子を定義する．そして，CPT 定理やスピンと統計の関係が局所場理論に対して一般的に成り立つ．対称性と保存則にもとづいて量子場の間の相互作用の在り方を求め，散乱現象・崩壊過程や輻射補正など実験と比較できる物理結果を，繰り込み理論によって導く計算の技法を与えるのが場の量子論である．その際，自由粒子の振る舞いを決める上でも，相互作用の形を決める上でも，対称性が指導原理になる．この章では，自由場の理論に限って，始めに，スカラー場の量子論を取り上げ，ついで，Dirac 場の量子論を展開する．ただし，力点は自由な Dirac 場の理論の入門的解説にあるので，対称性と保存則の間の密接な関係を述べる Noether の定理は Dirac 理論 (古典論) の節で詳述する．

3.1 スカラー場の量子論

Lorentz 変換の自明な 1 次元表現に属するスカラー (2.24) は，場の理論では，座標の関数として，スカラー場 $\phi(x)$ を定義する．その Poincaré 変換則は，スカラー場 $\phi(x)$ が同一の時空点では同じ値を持つことから，

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x), \quad x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in L_+^\uparrow \tag{3.1}$$

で与えられる．量子化する前のスカラー場は，実関数のときもあれば，複素関数のときもある．量子化によって，それらは，エルミートなスカラー場の演算子，

非エルミートなスカラー場の演算子になり，それらが作用する複素ベクトル空間である Hilbert 空間 (状態空間) が用意される．前者を実スカラー場，後者を複素スカラー場という．断らない限り，この節では複素スカラー場を考える．

自由なスカラー場の満たす， Lorentz 不変な方程式は，Klein-Gordon 方程式

$$(\Box - m^2)\phi(x) = 0 \tag{3.2}$$

である．ここで，$\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ は Klein-Gordon 演算子，m はスカラー場 $\phi(x)$ の記述する量子 (量子力学的粒子のことで，以下単に粒子という) の質量である．Klein-Gordon 方程式自身は自由粒子である限り粒子のスピンに無関係に成り立つが，スカラー場に付随する粒子のスピンは 0 である．今考えている複素スカラー場は粒子と共に反粒子を同時に記述することが後にわかる．

Klein-Gordon 方程式 (3.2) は次のラグランジアン*1)から最小作用の原理により導かれる．

$$\mathcal{L}_S = -\partial^\mu \phi^\dagger(x)\partial_\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) \tag{3.3}$$

ここで，複素スカラー場は，量子化を通して，非エルミートなスカラー場の演算子になることを考慮し，複素共役の記号 * の代わりに，エルミート共役の記号 † を用いた．(3.3) は Poincaré 不変だけでなく，位相変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\alpha}\phi(x), \quad \alpha \text{ は定数} \tag{3.4}$$

のもとでも不変である．その結果，(次節で紹介する) Noether の定理により，次の保存則が得られる．

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi^\dagger(x)\partial_\nu \phi(x) + \partial_\nu \phi^\dagger(x)\partial^\mu \phi(x) + \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_S,\ \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{3.5a}$$

$$M^{\mu\rho\sigma} = -2i(x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}), \quad \partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0 \tag{3.5b}$$

$$j_\mu(x) = -i\phi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi(x), \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{3.5c}$$

ただし，$\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$ と定義した ($f(x)\overleftarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu f(x)$ である)．従って，空間積分

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} T^{0\mu}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.5d}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^3\boldsymbol{x} M^{0\mu\nu}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.5e}$$

$$Q = \int d^3\boldsymbol{x} j^0(\boldsymbol{x}, t) = i \int d^3\boldsymbol{x} \phi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.5f}$$

は時間の恒量となる．特に (3.5f) は Lorentz スカラーである．

(3.3) から定義される正準運動量とハミルトニアンは

$$\pi^\dagger(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}^\dagger(x) \tag{3.6a}$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \dot{\phi}^\dagger(x)} = \dot{\phi}(x) \tag{3.6b}$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\boldsymbol{x} \Big(\pi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t) + \dot{\phi}^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\pi(\boldsymbol{x}, t) - \mathcal{L}_S \Big) \\ &= \int d^3\boldsymbol{x} \Big(\pi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\pi(\boldsymbol{x}, t) + \nabla\phi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{x}, t) + m^2\phi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)\phi(\boldsymbol{x}, t) \Big) \end{aligned} \tag{3.6c}$$

となる (ドットは時間に関する偏微分を表す．以下同様)．量子力学的な正準方程式は交換子積を $[A, B] = AB - BA$ とおいて，正準変数 $Z = \phi, \phi^\dagger, \pi, \pi^\dagger$ に対して，

$$i\dot{Z}(\boldsymbol{x}, t) = [Z(\boldsymbol{x}, t), H] \tag{3.7}$$

で与えられる．これが Klein-Gordon 方程式 (3.2) およびそのエルミート共役を与えるためには，

$$[A, B]_\pm = AB \pm BA \tag{3.8}$$

とおいて，関係式 (必要なとき以外は交換子積 $[A, B]_-$ の添字 $-$ は省略する)

$$[A, BC] = [A, B]_\pm C - B[C, A]_\pm \tag{3.9}$$

を使うと，演算子としてのスカラー場は次の同時刻正準交換関係

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \pi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.10a}$$

$$[\pi(\boldsymbol{x}, t), \phi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = -i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.10b}$$

$$\text{他の } [Z(\boldsymbol{x}, t), Z'(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = 0 \tag{3.10c}$$

を満たす必要がある[*2)]．正準変数が，$[Z, Z']_\pm$ どちらの交換関係で量子化されても，

$$[Q, \phi(x)] = -\phi(x) \tag{3.10d}$$

$$[Q, \phi^\dagger(x)] = +\phi^\dagger(x) \tag{3.10e}$$

となり，$\phi(x)$ は Q の固有値を 1 だけ減らし，$\phi^\dagger(x)$ は Q の固有値を 1 だけ増やす演算子と解釈できる．

ところがスカラー場はマイナスの交換子積 $[\ ,\ ]_- \equiv [\ ,\ ]$ でしか量子化されないことが，次のようにしてわかる．複素スカラー場は

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{3.11}$$

のように，実スカラー場 $\phi_{1,2}$ を用いて表すことができる．すると，(3.10a,b,c) は

$$[\phi_i(\boldsymbol{x}, t), \pi_j(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = i\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.12a}$$

$$[\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \phi_j(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = -i\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.12b}$$

$$\text{他の } [Z_i(\boldsymbol{x}, t), Z'_j(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = 0, \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.12c}$$

ならば満たされることがわかる．(3.12) は，(3.3)，(3.6) を互いに交換すると仮定された成分場 $\phi_{1,2}(x)$ でかき，(3.7) を $Z = \phi_i, \pi_i\ (i = 1, 2)$ に対して要求すれば導かれる (ϕ_1, ϕ_2 が交換するという仮定は不要であることが後にわかる)．しかし，エルミートな場に対しては，(3.12a) と (3.12b) はプラスの交換子積 $[\ ,\ ]_+$ の場合矛盾する．従って，スピン 0 の Klein-Gordon 場は，同時刻正準交換関係

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \pi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.13a}$$

$$[\pi(\boldsymbol{x}, t), \phi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)] = -i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.13b}$$

$$\text{他の } [Z(\boldsymbol{x}, t), Z'(\boldsymbol{x}', t)] = 0 \tag{3.13c}$$

によって量子化されるべきことが結論される．これはスピン 0 の粒子は Bose-Einstein 統計に従うことを意味する．一般にスピン整数の粒子は Bose-Einstein 統計に従い，**ボソン**といわれる．

Klein-Gordon 方程式の平面波解は

$$\phi(x) = \int_{\boldsymbol{p}} [a(\boldsymbol{p})e^{ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ipx}], \quad p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{3.14}$$

で与えられる．ただし，運動量空間における積分は $\int_{\boldsymbol{p}} \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0}$ と略記した．この積分測度が Lorentz 不変であることは容易にわかる．同時刻正準交換関係 (3.13) は

$$[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = [b(\boldsymbol{p}), b^\dagger(\boldsymbol{p}')] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{3.15a}$$

$$\text{他の交換関係} = 0 \tag{3.15b}$$

から導ける ((3.15a) の右辺は Lorentz 不変である)．従って，a, b は消滅演算子，$a^\dagger, b^\dagger$ は生成演算子の意味を持つ．(3.10d,e) をこれらで表せば，

$$[Q, a(\boldsymbol{p})] = -a(\boldsymbol{p}) \tag{3.16a}$$

$$[Q, b(\boldsymbol{p})] = +b(\boldsymbol{p}) \tag{3.16b}$$

$$[Q, a^\dagger(\boldsymbol{p})] = +a^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{3.16c}$$

$$[Q, b^\dagger(\boldsymbol{p})] = -b^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{3.16d}$$

となる．則ち，$a, a^\dagger$ は Q の固有値を 1 だけ減らしたり増やしたりする消滅・生成演算子，$b, b^\dagger$ は Q の固有値を 1 だけ増やしたり減らしたりする生成・消滅演算子である．$b, b^\dagger$ に対するこの解釈は (3.15a) と矛盾する．ところが，$1 = -(-1)$ なので，$b, b^\dagger$ は Q の固有値を -1 だけ減らしたり増やしたりする消滅・生成演算子と解釈すると (3.15a) に基づく解釈と整合する．粒子に対して，Q の固有値の符号が違うだけで他の物理的属性は全く同じ物を反粒子と呼ぶから，$a, a^\dagger$ を粒子の消滅・生成演算子，$b, b^\dagger$ を反粒子の消滅・生成演算子という．逆に，交換関係

$$[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')]_\pm = [b(\boldsymbol{p}), b^\dagger(\boldsymbol{p}')]_\pm = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{3.17a}$$

$$\text{他の } \pm \text{ 交換関係} = 0 \tag{3.17b}$$

を仮定して，同時刻交換関係を導くと，例えば，

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \pi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)]_\pm = \int_{\boldsymbol{p}} (ip^0)[e^{ip(x-x')} \mp e^{-ip(x-x')}] \tag{3.18a}$$

となって，(3.10a) を正しく与えるのは，マイナスの交換関係だけであることがわかる．(3.15) を用いて，

$$[\phi(x), \phi^\dagger(x')] = i\Delta(x-x') \tag{3.19a}$$

$$\Delta(x-x';m^2) = -i\int_p [e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')}],\ p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{3.19b}$$

が導ける．Pauli–Jordan の不変デルタ関数と呼ばれる $\Delta(x-x';m^2)$ は空間的に離れた 2 点に対してゼロになる．即ち，$(x-x')^2>0$ のとき，$\Delta(x-x';m^2) = 0$ が成り立つ．これは定義から $\Delta(x-x';m^2) = -\Delta(x'-x;m^2)$ が成り立つこと，および同時刻 $x^0 = x'^0$ ではゼロになることを使えばその Lorentz 不変性から示せる．このようにして，空間的に離れた 2 点 x, x' に対して，スカラー場 $\phi(x)$ は $\phi^\dagger(x')$ と交換する．これを，スカラー場は**微視的因果律**を満たすという．Lorentz 不変な理論に要求される微視的因果律は場の 2 次形式でかけるオブザーバルに対してであり，スカラー場の場合は場自身が微視的因果律を満たすという意味で自明であるが，Dirac 場の場合は自明でなくなる (3.3 節参照)．

量子化された場 $\phi(x)$ に対しては，Poincaré 変換 (3.1) はユニタリ演算子 $U(\Lambda, a)$ を用いて，

$$U(\Lambda,a)\phi(x)U^{-1}(\Lambda,a) = \phi(\Lambda x + a) \tag{3.20}$$

となる．古典場の変換性 (3.1) から量子場の変換性 (3.20) への翻訳のプロセスは，第 3.3 節で Dirac 場の量子化を議論するとき，改めて説明する．ここでは (3.20) を認めることにする．すると，無限小 Poincaré 変換 $\Lambda = I+\omega, a=\varepsilon$ に対して (2.57a) で定義された Poincaré 群のユニタリ表現の生成子 $\{P_\mu, M_{\mu\nu}\}$ とスカラー場の交換関係が

$$[P_\mu, \phi(x)] = i\partial_\mu\phi(x) \tag{3.21a}$$

$$[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = 2il_{\mu\nu}\phi(x) \tag{3.21b}$$

で与えられることがわかる．ただし，$l_{\mu\nu}$ は (2.60a) で定義されている．$P^0 = H$ はハミルトニアンなので，(3.21a) の時間成分は，(3.7) で $Z=\phi$ とおいたものに他ならない．これらの交換関係は，(3.5a,b,d,e) で与えられる 4 元運動量演算子 P_μ，4 次元的角運動量演算子 $M_{\mu\nu}$ と同時刻交換関係 (3.13) を用いて確かめられる．しかしながら，これらの演算子の間に成り立つ (2.59a,b,c) の Poincaré 代数を導くには，(3.21) を利用して真空 $|0\rangle$ の Poincaré 不変性

$$U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle, \quad a(\boldsymbol{p})|0\rangle = b(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0 \tag{3.22}$$

を使う間接的方法がある．この方法は第 3.3 節の Dirac 場の正準量子化の節で詳しく述べる．

展開 (3.14) を (3.20) に代入すれば，変換則

$$U(\Lambda, a)a(\boldsymbol{p})U^{-1}(\Lambda, a) = e^{i\Lambda p\cdot a}a(\Lambda\boldsymbol{p}) \tag{3.23a}$$

$$U(\Lambda, a)a^\dagger(\boldsymbol{p})U^{-1}(\Lambda, a) = e^{-i\Lambda p\cdot a}a^\dagger(\Lambda\boldsymbol{p}) \tag{3.23b}$$

が導かれる．$b(\boldsymbol{p}), b^\dagger(\boldsymbol{p})$ についても同様．それ故，真空の Poincaré 不変性 (3.22) を使って，1 粒子状態

$$|p\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle, \quad p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2} \tag{3.23c}$$

の Poincaré 変換性

$$U(\Lambda, a)|p\rangle = e^{-i\Lambda p\cdot a}|\Lambda p\rangle \tag{3.23d}$$

が得られる．これは ($a = 0$ とおいたとき) (2.68g) の $s = 0$ の場合に相当し，スカラー場がスピン 0 の粒子を記述することを示している．この結論はスカラー場の $J^{\mu\nu} = 0$ であることから，自明であった．

次に自由なスカラー場の理論の離散対称性について述べる．

空間反転 (P 変換)

空間反転 (2.10a) のもとで，自由なスカラー場の理論は不変である．空間反転 (P 変換) は状態空間に作用するユニタリ演算子 $\mathcal{P} \equiv U(\Lambda_s, 0)$ で記述される．ただし，Λ_s は (2.10b) で与えられる．このとき，理論の空間反転不変性は

$$\mathcal{P}U(\Lambda, a)\mathcal{P}^{-1} = U(\Lambda_s\Lambda\Lambda_s^{-1}, \Lambda_s a) \tag{3.24a}$$

を満たすユニタリ演算子 $\mathcal{P}$ の存在を意味する．弱い相互作用に対しては (3.24a) を満たすユニタリ演算子 $\mathcal{P}$ が存在しないことは，**パリティの非保存**としてあまりにもよく知られた有名な事実である．この章では，自由場の理論に対してのみ (3.24a) を適用する．

無限小 Poincaré 変換 $\Lambda = I + \omega$, $a = \varepsilon$ に対して，(2.57a) を使うと (3.24a) から，

$$\mathcal{P}\begin{Bmatrix} H \\ \boldsymbol{P} \\ M^{ij} \\ M^{0i} \end{Bmatrix}\mathcal{P}^{-1} = \begin{Bmatrix} H \\ -\boldsymbol{P} \\ M^{ij} \\ -M^{0i} \end{Bmatrix} \tag{3.24b}$$

が導かれる．(3.21) を左右から $\mathcal{P}\cdots\mathcal{P}^{-1}$ のように挟むと，(3.24b) に注意して，

$$[P_\mu, \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1}] = i\partial_\mu^P \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1}$$
$$[M_{\mu\nu}, \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1}] = 2il_{\mu\nu}^P \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} \tag{3.24c}$$

となる．ここで，$x_P^\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$ を使って，$\partial_\mu^P \equiv \partial/\partial x_P^\mu$ とおいた．従って，

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \eta_P \phi(x_P) \tag{3.24d}$$

ならば，(3.24c) は (3.21) で $x \to x_P$ とおき換えたものになる．空間反転を 2 度繰り返すと元に戻るから，$\eta_P^2 = 1 \to \eta_P = \pm 1$ である．$\eta_P = 1$ の場合をスカラー，$\eta_P = -1$ の場合を擬スカラーと呼ぶ．(3.24d) を展開式 (3.14) に代入すると，生成・消滅演算子に対する変換則

$$\mathcal{P}\begin{Bmatrix} a(\boldsymbol{p}) \\ a^\dagger(\boldsymbol{p}) \\ b(\boldsymbol{p}) \\ b^\dagger(\boldsymbol{p}) \end{Bmatrix}\mathcal{P}^{-1} = \eta_P \begin{Bmatrix} a(-\boldsymbol{p}) \\ a^\dagger(-\boldsymbol{p}) \\ b(-\boldsymbol{p}) \\ b^\dagger(-\boldsymbol{p}) \end{Bmatrix}, \quad \eta_P = \pm 1 \tag{3.24e}$$

が得られる．

荷電共役変換 (C 変換)

粒子と反粒子を入れ替える操作

$$\text{粒子} \longleftrightarrow \text{反粒子} \tag{3.25a}$$

を荷電共役変換 (C-変換) という．複素スカラー場の荷電共役変換は次のように定義される．スカラー場の理論が C-不変であるというとき，次のような性質を持った，状態空間に作用するユニタリ演算子 $\mathcal{C}$ の存在を意味する．

$$\mathcal{C}U(\Lambda, a)\mathcal{C}^{-1} = U(\Lambda, a) \tag{3.25b}$$

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = \eta_C b(\boldsymbol{p}), \quad |\eta_C| = 1 \tag{3.25c}$$

$$\mathcal{C}b(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = \eta_C^* a(\boldsymbol{p}) \tag{3.25d}$$

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \eta_C \phi^\dagger(x) \tag{3.25e}$$

この変換のもとで，ラグランジアン (3.3) は次のように変化する．

$$\mathcal{L}_S^c \equiv \mathcal{C}\mathcal{L}_S\mathcal{C}^{-1} = -\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi^\dagger(x) - m^2\phi(x)\phi^\dagger(x) \tag{3.25f}$$

同一時空点における場およびその時間偏微分の交換則を用いれば，これは，(3.3) に等しいが，明白な C-不変性を持つラグランジアンは，(3.3) と上式の平均 (を改めて $\mathcal{L}_S$ とかく) で，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S = &-\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x) + \partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi^\dagger(x)) \\ &-\frac{1}{2}m^2(\phi^\dagger(x)\phi(x) + \phi(x)\phi^\dagger(x))\end{aligned} \tag{3.25g}$$

である．これを用いると，(3.12) は成分場 $\phi_{1,2}$ が交換するという仮定なしに導かれる．特に断らない限り，この本では (3.3) を用いる．

時間反転 (T 変換)

時間反転 (2.10c) のもとで，自由なスカラー場の理論は不変である．それは状態空間に作用する反ユニタリ演算子 $\mathcal{T} \equiv U(\Lambda_t, 0)$ で記述される．ただし，Λ_t は (2.10d) で与えられる．このとき，理論の時間反転不変性は

$$\mathcal{T}U(\Lambda, a)\mathcal{T}^{-1} = U(\Lambda_t\Lambda\Lambda_t^{-1}, \Lambda_t a) \tag{3.26a}$$

を満たす $\mathcal{T}$ の存在を意味する．$\mathcal{T}$ がなぜ反ユニタリかというと，(3.26a) を $\Lambda = I, a = \varepsilon$：無限小の場合に適用すると，

$$\mathcal{T}(iP^\mu\varepsilon_\mu)\mathcal{T}^{-1} = iP^\mu(\Lambda_t\varepsilon)_\mu \tag{3.26b}$$

となるが，ハミルトニアン $P^0 = H$ の正定値性は時間反転をしても変わらないので，

$$\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i \tag{3.26c}$$

を仮定しなければならないからである．これを満たす演算子は反ユニタリと呼ばれる (より正確な定義は (3.89) を参照)．従って，

$$\mathcal{T}\left\{\begin{array}{l} H \\ \boldsymbol{P} \\ M^{ij} \\ M^{0i} \end{array}\right\}\mathcal{T}^{-1} = \left\{\begin{array}{l} H \\ -\boldsymbol{P} \\ M^{ij} \\ -M^{0i} \end{array}\right\} \tag{3.26d}$$

を得る[*3)]．(3.21) を左右から $\mathcal{T}\cdots\mathcal{T}^{-1}$ のように挟むと，(3.26c)，(3.26d) に注意して，

$$\begin{aligned} [P_\mu, \mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1}] &= i\partial_\mu^T \mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1} \\ [M_{\mu\nu}, \mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1}] &= 2il_{\mu\nu}^T \mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1} \end{aligned} \tag{3.26e}$$

となる．ここで，$x_T^\mu = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$ を使って，$\partial_\mu^T \equiv \partial/\partial x_T^\mu$ とおいた．従って，

$$\mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1} = \eta_T \phi(x_T) \tag{3.26f}$$

ならば，(3.26e) は (3.21) で $x \to x_T$ とおき換えたものになる．時間反転を 2 度繰り返すと元に戻るから，$\eta_T^2 = 1$ となる．

CPT 対称性

T, P, C 変換を続けて行うとき，相対論的な局所場理論は不変である．これは一般的になり立ち，CPT **定理**という．自由なスカラー場の理論はその最も簡単な例である．$\Theta = \mathcal{CPT}$ とおくと，(3.24b)，(3.25b) と (3.26c,d) から，反ユニタリな演算子 Θ, $\Theta i \Theta = -i$ は次式を満たす．

$$\Theta\left\{\begin{array}{l} P^\mu \\ M^{\mu\nu} \end{array}\right\}\Theta^{-1} = \left\{\begin{array}{l} P^\mu \\ M^{\mu\nu} \end{array}\right\} \tag{3.27a}$$

また，スカラー場の変換性は (3.24d)，(3.25e)，(3.26f) から，

$$\Theta\phi(x)\Theta^{-1} = \eta_\Theta \phi^\dagger(-x), \quad \eta_\Theta = \eta_C \eta_P \eta_T \tag{3.27b}$$

となる．さらに，(3.21) を左右から $\Theta\cdots\Theta^{-1}$ のように挟むと，(3.27a,b) に注意して，

$$[P_\mu, \phi^\dagger(-x)] = -i\partial_\mu \phi^\dagger(-x) \tag{3.27c}$$

$$[M_{\mu\nu}, \phi^\dagger(-x)] = 2il_{\mu\nu}\phi^\dagger(-x) \tag{3.27d}$$

を得るが，これは，(3.21) のエルミート共役をとって，$x \to -x$ としたものに他ならない (Poincaré 群のユニタリ表現では，$M_{\mu\nu}$ は反エルミートであることに注意)．ラグランジアン (3.25g) は $\Theta\mathcal{L}_S(x)\Theta^{-1} = \mathcal{L}_S(-x)$ となって，自由なスカラー場の理論が CPT 不変であることが確かめられた．なお，これらの離散変換のもとで，同時刻交換関係 (3.13)，共変的な交換関係 (3.19) が不変に保たれることは容易に確かめられる．

3.2 Dirac 理論 (古典論)

Weyl スピノル，Dirac スピノル，Majorana スピノルなども，場の理論では，$\xi(x), \overline{\eta}(x), \psi(x), \chi(x)$ とかかれる場の量 (**世界スピノル**) で，次の Poincaré 変換則に従う．

$$\xi'(x') = A\xi(x) \tag{3.28a}$$

$$\overline{\eta}'(x') = A^{\dagger\,-1}\overline{\eta}(x) \tag{3.28b}$$

$$\chi'(x') = S(\Lambda)\chi(x) \tag{3.28c}$$

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{3.28d}$$

ただし，$x' = \Lambda x + a$, $\Lambda \in L_+^\uparrow$, $A = A(\Lambda) \in SL(2, \mathbb{C})$．いずれも Fermi-Dirac 統計に従って反交換関係により量子化される, 古典的には Grassmann 変数である．この節では，自明でない変換性と方程式の解の豊富な性質を考慮して，まず古典論をやる．ついで，次節で量子論に進む．

Lorentz 不変性から，スピノル場の従う方程式は，各スピノルに対し，

$$\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi(x) = 0 \tag{3.29a}$$

$$\sigma^\mu \partial_\mu \overline{\eta}(x) = 0 \tag{3.29b}$$

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\chi(x) = 0 \tag{3.29c}$$

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{3.29d}$$

である．ただし，質量パラメータはスカラー場と同じ記号 m を用いた．Weyl

方程式 (3.29a,b) は後述するように，P 不変でも，C 不変でもないが，CP 不変ではある．Weyl 方程式の右辺には，Lorentz 共変な形で質量項を付け加えることができる[4)]が，すると，非線形な方程式が得られる．しかし，成分を倍増すれば線形化でき，それをユニタリ変換したものが Majorana 方程式 (3.29c) である．従って (3.29c) の Dirac 行列は Majorana 表示をとっており，Majorana スピノル $\chi(x)$ は古典論では実場，量子論ではエルミートな場である．(3.29d) は有名な Dirac 方程式である[5)]．これらスピノル場の理論の端緒をなしたのは，および前節のスカラー場の矛盾のない量子論に先鞭をつけたのは，言うまでもなく，電子の相対論的運動方程式として Dirac により提唱された Dirac 方程式である．これにより，それまで知られていなかった，Lorentz 群の表現としてスピノルの存在と粒子に対するに反粒子の存在が明らかになったのである．Dirac 方程式は，電子がスピン 1/2 を持つことを特殊相対論と量子力学との融合の結果として説明し，正しい磁気能率を与えたほか，水素原子のエネルギー準位についても輻射補正を考えない範囲で大成功を収めた．その上，Dirac は，負エネルギー解の困難を Pauli 原理にもとづいて巧妙に回避する空孔理論を提唱し，その論理的帰結として電荷の符号が反対だけでその他の性質はすべて電子と全く同じ反電子 (陽電子) の存在を予言し，それが宇宙線の実験で見事に実証され，われわれの世界観を根底から変えたのであった．これから述べるのは，全くの形式的議論にすぎないが，Dirac 方程式から場の量子論への発展のいきさつを知ることは，形式的にも実質的にも豊かな物理的内容をもたらす．残念ながら，この本ではこのような歴史的背景を詳しく述べる余裕がない．読者は，例えば，章末に例として引用する本を参照されたい[6)]．

Dirac 代数 (2.37) のために，自由な Dirac スピノル ψ のすべての成分は Klein-Gordon 方程式 $(\Box - m^2)\psi = 0$ を満たす．これは他のスピノル場に対しても同様である．よく知られているように，Dirac はスカラー場の Klein-Gordon 方程式から帰結する負の確率の困難を避けるため，$(\Box - m^2)$ を因数分解して，Dirac 代数 (2.37) を見出し，Dirac 方程式 (3.29d) を発見した．

Dirac 方程式 (3.29d) のエルミート共役を取り，右から $i\gamma^0$ を掛けると，

$$\overline{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0 \tag{3.30a}$$

を得る．この転置行列を取り，

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu\, T} \tag{3.30b}$$

を満たすユニタリな荷電共役行列 C を使って，荷電共役スピノル

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T \tag{3.30c}$$

を定義すると，(3.30a) は，(3.29d) と全く同じ形をとる：

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi^c(x) = 0 \tag{3.30d}$$

この際，荷電共役スピノルが元のスピノルと同じ Lorentz 変換性を示すことを確かめねばならない．それは，(2.43) に注意して，$S(\Lambda)$ が (2.34) で与えられる Weyl 表示で荷電共役行列が

$$C = \begin{pmatrix} -\varpi & 0_2 \\ 0_2 & \varpi \end{pmatrix} \tag{3.30e}$$

となることを使うと容易である．ここで，ϖ は (2.21b) で与えられる．あとは任意の表示に移ればよい[7)]．荷電共役行列 C は，その定義から，任意の表示で，

$$C^T = -C \tag{3.30f}$$

を満たす．また，

$$\overline{\psi^c} = -\psi^T C^{-1} \tag{3.30g}$$

となることが示せる．$\psi \to S\psi$ によるガンマ行列の表示の変更 $\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$ は，$C \to C' = SCS^T$ に導く．特に，

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\varpi & 0_2 \\ 0_2 & \varpi \end{pmatrix}, \qquad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.31a}$$

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_2 & \varpi \\ \varpi & 0_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(標準表示)} \tag{3.31b}$$

$$C = -i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_2 & i\varpi \\ i\varpi & 0_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(マヨラナ表示)} \tag{3.31c}$$

となる[8)]．(3.31a) はもちろん (3.30e) に他ならない．

Dirac 方程式は Lorentz 不変なラグランジアン

$$\mathcal{L}_D = -\overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \tag{3.32a}$$

から最小作用の原理により得られる．しかしながら，上のラグランジアンはエルミートでない (全微分項を除けばエルミートになる)．これは，エルミートでないハミルトニアンに導くという，形式的困難を持つ (ハミルトニアンの空間積分は，表面項が落ちるという普通の仮定のもとでエルミートになるので，エネルギーの固有値は実数になる．従って，普通のラグランジアン (3.32a) を採用しても何ら問題はない)．運動方程式を得るためのラグランジアンには，全微分だけの任意性があることがよく知られている．これを利用して，この本では，

$$\mathcal{L}_D = -\overline{\psi}(\frac{1}{2}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi \tag{3.32b}$$

というエルミートなラグランジアンを選ぶ．この場合，$\psi(x), \overline{\psi}(x)$ の任意の変分 $\delta\psi(x), \delta\overline{\psi}(x)$ によるラグランジアンの変分は，

$$\delta\mathcal{L}_D = -\delta\overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi + \overline{\psi}(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} - m)\delta\psi + (\text{全微分項})$$

で与えられる．それ故，最小作用の原理 $\delta \int d^4x \mathcal{L}_D(x) = 0$ から，任意な変分 $\delta\psi(x), \delta\overline{\psi}(x)$ が独立に選べることを使うと，Euler-Lagrange の運動方程式として，Dirac 方程式 (3.29d) と (3.30a) を得る．最小作用の原理とは異なる今ひとつの変分原理に，共に運動方程式を満たす 2 つの，無限小しか離れていない場を比べることにより，理論の不変性（あるいは対称性）と保存則の関係を樹立する **Noether の定理**を導く方法がある．

そこで，まず上のラグランジアンが持つ不変性と対応する保存則との関係を調べる．

1. Poincaré 不変性

固有 Poincaré 変換

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x),$$
$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda), \quad x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in L_+^\uparrow \tag{3.33}$$

のもとで $\mathcal{L}_D$ は不変である．この変換は連続変換であり，無限小変換により生成される．よく知られているように, 作用がある無限小変換のもとで不変

ならば，保存する **Noether 流**が存在する．

この Noether[9)]の定理を今の場合について，かいつまんで説明する．無限小 Poincaré 変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu$, $\partial_\mu \delta x^\mu = 0$, のもとで，Dirac 場が

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x) + \delta\psi(x) \tag{3.34a}$$

と変換したとする．この変換のもとで，ラグランジアンは不変だから，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_D \equiv &[-\overline{\psi}'(x')(\frac{1}{2}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}'_\mu + m)\psi'(x')] \\ &- [-\overline{\psi}(x)(\frac{1}{2}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi(x)] = 0\end{aligned} \tag{3.34b}$$

となっている．この第 1 項に無限小変換の式 (3.34a) を代入して，δ の 1 次の項まで取れば，$\partial'_\mu = \partial_\mu - (\partial_\mu \delta x^\nu)\partial_\nu$ となるから，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_D &= -\frac{1}{2}\delta^*\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi(x) - \frac{1}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \delta^*\psi(x) \\ &\quad - m(\delta^*\overline{\psi}(x)\psi(x) + \overline{\psi}(x)\delta^*\psi(x)) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}_D \\ &= -\delta^*\overline{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) - \overline{\psi}(x)(-\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m)\delta^*\psi(x) \\ &\quad + \partial_\mu[-\frac{1}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\delta^*\psi(x) + \frac{1}{2}\delta^*\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)] + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}_D = 0\end{aligned} \tag{3.34c}$$

を得る．ここで変分 δ に付随して現れる実質的変分 δ^* (Lie 微分) を次式によって定義した．

$$\begin{aligned}\delta^*\psi(x) &= \psi'(x) - \psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) + \psi'(x) - \psi'(x') \\ &= \delta\psi(x) + \psi(x) - \psi(x') = \delta\psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x)\end{aligned} \tag{3.34d}$$

この第 1 行 2 番目の等号は恒等式であるが，第 2 行は近似式である．さて，(3.34c) において，運動方程式を使うと，無限小推進変換と無限小 Lorentz 変換からなる無限小 Poincaré 変換では $\partial_\mu \delta x^\mu = 0$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}&\partial_\mu J^\mu = 0 \\ &\quad J^\mu = -\frac{1}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\delta^*\psi(x) + \frac{1}{2}\delta^*\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + \delta x^\mu \mathcal{L}_D\end{aligned} \tag{3.34e}$$

という保存則が得られる．これを Noether の定理といい，保存する J^μ を Noether 流という．その構成から，J^μ はエルミートである．保存流は一意

的には決まらないことが知られている．実際，J^μ が保存するなら，

$$\tilde{J}^\mu = J^\mu + \partial_\lambda f^{\lambda\mu}, \quad f^{\lambda\mu} = -f^{\mu\lambda} \tag{3.34f}$$

も自動的に保存する．この任意性についてはエネルギー・運動量テンソルの対称化について p.111 で述べる．

無限小推進変換の場合は，ε^μ を無限小の変換パラメータとして，$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ とかける．このとき，$\delta\psi(x) = 0$ から $\delta^*\psi(x) = -\varepsilon^\mu\partial_\mu\psi(x)$ となるから，対応する Noether 流は，

$$\begin{aligned} J^\mu &= \varepsilon^\nu T^\mu{}_\nu \\ T^\mu{}_\nu &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu\overline{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x) + \frac{1}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\nu\psi(x) + \eta^\mu{}_\nu\mathcal{L}_D,\ \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \end{aligned} \tag{3.35a}$$

となる．上で定義した $T^\mu{}_\nu$ を**正準エネルギー・運動量テンソル**という．$T^\mu{}_\nu$ の保存則から，エネルギー・運動量

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x} T^{0\mu}(x) \tag{3.35b}$$

は時間的に一定となる．正準エネルギー・運動量テンソルを用いると，(3.34e) は

$$J^\mu = -\frac{1}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\delta\psi(x) + \frac{1}{2}\delta\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + \delta x^\nu T^\mu{}_\nu \tag{3.35c}$$

とかけることに注意しよう．

無限小 Lorentz 変換の場合は，$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ を無限小の変換パラメータとして，$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu = -\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(a^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu, (a^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -2(\eta^{\rho\mu}\eta^\sigma{}_\nu - \eta^\rho{}_\nu\eta^{\sigma\mu})$ とかけることは (2.16a,b) で見た．場の変換則は，一般の表示で与えられる (2.38) の $S^{\mu\nu}$ を用いて，$\delta\psi(x) = -\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\psi(x), \delta\overline{\psi}(x) = +\frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\overline{\psi}(x)S^{\rho\sigma}$ であるから，対応する保存 Noether 流は，

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{4i}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\rho\sigma} \\ M^{\mu\rho\sigma} &= \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S^{\rho\sigma}\psi(x) + \frac{i}{2}\overline{\psi}(x)S^{\rho\sigma}\gamma^\mu\psi(x) - 2i(x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}) \end{aligned}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0 \tag{3.35d}$$

となる．交換関係 $[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma - 2\eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho$ を使い，発散を取ったとき，運動方程式によりゼロになる項を除くと，

$$M^{\mu\rho\sigma} = i\overline{\psi}(x)\gamma^\mu(S^{\rho\sigma} - 2il^{\rho\sigma})\psi(x) \tag{3.35e}$$

となることがわかる．ただし，$l_{\mu\nu}$ は (2.60a) で与えられている．従って，

$$M^{\mu\nu} = \int d^3\boldsymbol{x} M^{0\mu\nu}(x) = \int d^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(x)(S^{\mu\nu} - 2il^{\mu\nu})\psi(x) \tag{3.35f}$$

は時間の恒量になる．

(3.35e) の証明，Tetrode の公式および対称エネルギー・運動量テンソル

(3.35d) で与えられた角運動量密度 $M^{\mu\rho\sigma}$ の第 2 項には交換関係 $[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma - 2\eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho$ を使い，第 3 項には，(3.35a) の正準エネルギー・運動量テンソルの具体的表式を用いて，Lorentz 不変性に付随する Noether 流は

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S^{\rho\sigma}\psi(x) + \frac{1}{4}[\omega^\mu{}_\sigma\overline{\psi}(x)\gamma^\sigma\psi(x) - \omega_\rho{}^\mu\overline{\psi}(x)\gamma^\rho\psi(x)] \\
&\quad + \omega^\nu{}_\rho x^\rho[\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\nu\psi(x)] - \frac{1}{2}\omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) + \omega^\mu{}_\rho x^\rho\mathcal{L}_D \\
&= \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S^{\rho\sigma}\psi(x) + \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu(x_\rho\partial_\nu - x_\nu\partial_\rho)\psi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}\overline{\psi}(x)\gamma_\sigma\psi(x) - \frac{1}{2}\omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)
\end{aligned}$$

となる．ここで，運動方程式を使って $\mathcal{L}_D = 0$ とおいた．ところがこの第 2 行の発散は再び運動方程式を使うとゼロになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_\mu[\omega^{\mu\sigma}\overline{\psi}(x)\gamma_\sigma\psi(x) - \omega^\nu{}_\rho x^\rho\partial_\nu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)] \\
&= \left[\frac{1}{2}\omega^{\mu\sigma}\partial_\mu(\overline{\psi}(x)\gamma_\sigma\psi(x)) - \omega^\nu{}_\mu\partial_\nu(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))\right] = 0
\end{aligned}$$

従って，すぐ上の J^μ の第 2 行は落としてよい．

$$J^\mu = \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu S^{\rho\sigma}\psi(x) + \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu(x_\rho\partial_\nu - x_\nu\partial_\rho)\psi(x) = \frac{1}{4i}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\rho\sigma}$$

とおいて，(3.35e) の $M^{\mu\rho\sigma}$ を得る．

次に (3.35d) に戻って，

$$h^{\mu\rho\sigma}(x) = \frac{1}{4}\overline{\psi}(x)(\gamma^\mu S^{\rho\sigma} + S^{\rho\sigma}\gamma^\mu)\psi(x) = -h^{\mu\sigma\rho}(x)$$

とおけば，角運動量密度が

$$M^{\mu\rho\sigma} = 2i[h^{\mu\rho\sigma} - (x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho})]$$

で与えられ，その保存則から，正準エネルギー・運動量テンソルの反対称成分が保存則 (3.35a)，(3.35d) を用いて

$$T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho} = \partial_\mu h^{\mu\rho\sigma}(x)$$

で与えられることがわかる．これを **Tetrode の公式**という．そこで，

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad f_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\lambda\mu\nu} + h_{\nu\mu\lambda} + h_{\mu\nu\lambda}) = -f_{\mu\lambda\nu}$$

と定義すれば $\theta^{\mu\nu}$ は対称で保存則を満たすことが示せる．なぜなら

$$\theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} - \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\nu} - f^{\lambda\nu\mu}) = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} - \partial_\lambda h^{\lambda\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = 0$$

この $\theta^{\mu\nu}$ を Belifante の**対称エネルギー・運動量テンソル** と呼ぶ．正準エネルギー・運動量テンソルから対称エネルギー・運動量テンソルを得るこの方法は (3.34f) の応用である．

対称エネルギー・運動量テンソルを用いると，

$$P^\mu = \int d^3\boldsymbol{x}\theta^{0\mu}(x)$$

$$M^{\mu\nu} = -2i\int d^3\boldsymbol{x}[x^\mu\theta^{0\nu}(x) - x^\nu\theta^{0\mu}(x)]$$

と表せる．証明は無限遠で場はゼロになるとして Gauss の定理を使う．

$$\begin{aligned}
\int d^3\boldsymbol{x}\theta^{0\mu}(x) &= \int d^3\boldsymbol{x}[T^{0\mu}(x) - \partial_\lambda f^{\lambda 0\mu}] = \int d^3\boldsymbol{x}[T^{0\mu}(x) - \partial_i f^{i0\mu}] \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}T^{0\mu}(x) = P^\mu \\
\theta^{\mu\rho}x^\sigma - \theta^{\mu\sigma}x^\rho &= T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho - (\partial_\lambda f^{\lambda\mu\rho})x^\sigma + (\partial_\lambda f^{\lambda\mu\sigma})x^\rho \\
&= T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho - \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\rho}x^\sigma) + \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\sigma}x^\rho) + f^{\sigma\mu\rho} - f^{\rho\mu\sigma} \\
&= T^{\mu\rho}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\rho + h^{\mu\rho\sigma} - \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\rho}x^\sigma) + \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\sigma}x^\rho) \\
&= \frac{1}{2i}M^{\mu\rho\sigma} - \partial_\lambda(f^{\lambda\mu\rho}x^\sigma - f^{\lambda\mu\sigma}x^\rho) \\
M^{\mu\nu} &= \int d^3\boldsymbol{x}M^{0\mu\nu} \\
&= 2i\int d^3\boldsymbol{x}[\theta^{0\mu}(x)x^\nu - \theta^{0\nu}(x)x^\mu + \partial_\lambda(f^{\lambda 0\mu}x^\nu - f^{\lambda 0\nu}x^\mu)] \\
&= 2i\int d^3\boldsymbol{x}[\theta^{0\mu}(x)x^\nu - \theta^{0\nu}(x)x^\mu + \partial_i(f^{i0\mu}x^\nu - f^{i0\nu}x^\mu)] \\
&= -2i\int d^3\boldsymbol{x}[x^\mu\theta^{0\nu}(x) - x^\nu\theta^{0\mu}(x)]
\end{aligned}$$

□

2. 位相不変性

$U(1)$ 位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x), \quad \alpha: \text{実定数} \tag{3.36a}$$

のもとで，$\mathcal{L}_D$ は不変．この場合，座標は変化しないから，$\delta x^\mu = 0$ で，無限小変換 $\delta\psi(x) = -i\alpha\psi(x), \delta\overline{\psi}(x) = i\alpha\overline{\psi}(x)$ に付随する Noether 流は，α で割り算して，

$$J^\mu = i\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{3.36b}$$

となる．

保存する Noether 流が存在するのは，連続変換の下での不変性に限るが，これから述べる離散的対称性も Dirac 理論で重要な位置を占める．

3. 空間反転 (P) 不変性

空間反転のもとで，古典的 Dirac 場は

$$\begin{aligned}
&\psi'(x_P) = i\eta_P\gamma^0\psi(x) \equiv S(\Lambda_s)\psi(x), \\
&\overline{\psi}'(x_P) = i\eta_P^*\overline{\psi}(x)\gamma^0 \equiv \overline{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda_s), \quad |\eta_P|^2 = 1 \\
&\qquad S^{-1}(\Lambda_s)\gamma^\mu S(\Lambda_s) = (\Lambda_s)^\mu{}_\nu\gamma^\nu
\end{aligned} \tag{3.37}$$

と変換すれば，Dirac 方程式，従って，ラグランジアンは P 不変 $\mathcal{L}'_D(x_P) = \mathcal{L}_D(x)$ である．Weyl 表示 (2.36) では，

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0_2 \\ 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \quad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.38}$$

となり，Dirac スピノル (2.33) は，その定義により上 2 成分と下 2 成分とが分離する．

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.39a}$$

$$\frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\eta}(x) \end{pmatrix} \quad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.39b}$$

ところが，空間反転のもとで，

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\psi'(x_P) = \begin{pmatrix} \xi'(x_P) \\ 0 \end{pmatrix} = i\eta_P\gamma^0\frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \eta_P\overline{\eta}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.40a}$$

$$\frac{1+\gamma_5}{2}\psi'(x_P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\eta}'(x_P) \end{pmatrix} = i\eta_P\gamma^0\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_P\xi(x) \end{pmatrix} \quad \text{(Weyl 表示)} \tag{3.40b}$$

となるので，Weyl 方程式 (3.29a,b) は空間反転のもとで入れ替わる．

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0 \underset{P}{\longrightarrow} \sigma^\mu\partial_\mu\overline{\eta}(x) = 0 \tag{3.41a}$$

$$\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\eta}(x) = 0 \underset{P}{\longrightarrow} \overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0 \tag{3.41b}$$

則ち，Weyl 方程式 (3.29a,b) はそれら自身では P 不変ではない．実際 Weyl 方程式 (3.29a) の平面波解を $\xi(x) = \xi(\boldsymbol{p})e^{ipx}$ の形に求めると，$\xi(\boldsymbol{p})$ は $\overline{\sigma}^\mu p_\mu\xi(\boldsymbol{p}) = (p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\xi(\boldsymbol{p}) = 0$ を満たす．この方程式は，$\det(\overline{\sigma}^\mu p_\mu) = -p^2 = 0$ のとき，自明でない解を持つ．従って，$p^0 = \pm|\boldsymbol{p}|$ となる．つまり，正・負のエネルギー解を持つ (これが粒子・反粒子に対応する)．この $\pm$ の符号に応じて，解を $\xi_\pm(\boldsymbol{p})$ とおくと，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ がヘリシティ演算子 (の 2 倍) なので，

$$\xi_\pm(\boldsymbol{p}) \text{ のヘリシティは } \pm\frac{1}{2}$$

となり，正エネルギー解が正・負のヘリシティを持つことはない．負エネルギー解についても同様である．空間反転をすれば，運動量も符号を変えるので，片方のヘリシティしか持たないと言うことは，Weyl 方程式 (3.29a) は空間反転のもとで不変でないことを述べている．同様に Weyl 方程式 (3.29b) も P 不変性を破る．しかし，同時に粒子 $\leftrightarrow$ 反粒子とすれば，不変性が回復する，つまり CP-不変ではある．これは後程確かめる．

なお，射影演算子 $P_{L,R} = (1 \pm \gamma_5)/2$ を用いた**カイラル分解**

$$\psi_L(x) = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi(x) \equiv P_L\psi(x), \ (+ \text{ のカイラリティー}) \tag{3.42a}$$

$$\psi_R(x) = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x) \equiv P_R\psi(x), \ (- \text{ のカイラリティー}) \tag{3.42b}$$

は，任意の表示では一般に 4 成分スピノルであるが，Weyl 表示を取れば，質量ゼロの極限で (正エネルギー解が) おのおの左巻き (left-handed)，右巻き (right-handed) の状態を記述する．これが，(3.42) の添字 L, R の理由である．

4. 荷電共役 (C) 不変性

荷電共役変換

$$\psi(x) \to \psi^c(x) = \eta_C C\overline{\psi}^T(x)$$
$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}^c(x) = -\eta_C^*\psi^T(x)C^{-1} \quad |\eta_C|^2 = 1 \tag{3.43}$$

のもとで，(3.29d) と (3.30d) は入れ替わるので，Dirac 方程式は不変に留まる (以下，(3.30c) の $\eta_C = 1$ とおいた ψ^c を用いることも多いが，一般には (3.43) のように位相因子 η_C を含む)．ここで，ユニタリな荷電共役行列 C は (3.30b) で定義され，(3.30f) に従う．しかし，$\mathcal{L}_D$ は次のように変化する:

$$\mathcal{L}_D \to \mathcal{L}_D^c = -\frac{1}{2}\psi^T(x)\gamma^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\overline{\psi}^T(x) + m\psi^T(x)\overline{\psi}^T(x) \tag{3.44}$$

ここで，古典的な Dirac 場 ψ は複素 Grassmann 数であるから，$\psi^T\Gamma^T\overline{\psi}^T = -(\overline{\psi}\Gamma\psi)^T = -\overline{\psi}\Gamma\psi$ となることを使うと，$\mathcal{L}_D^c = \mathcal{L}_D$ となる．しかしながら，量子化すると，最早この関係式は使えない[10)]ので，その場合に荷電共役変換のもとで明白な不変性を持つラグランジアンは，(3.32b) と (3.44) の平均を取って (それを改めて $\mathcal{L}_D$ とおく)，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D &= -\frac{1}{2}[\overline{\psi}(x), (\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi(x)] \\
&\equiv -\frac{1}{4}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi(x) - \frac{1}{4}(\gamma^\mu\psi(x))^T\overleftrightarrow{\partial}_\mu\overline{\psi}^T(x) \\
&\quad - \frac{m}{2}[\overline{\psi}(x)\psi(x) - \psi^T(x)\overline{\psi}^T(x)] \\
&= -\frac{1}{2}\overline{\psi}(x)(\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi(x) - \frac{1}{2}\overline{\psi}^c(x)(\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi^c(x)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

で与えられる．この C-不変なラグランジアンから得られる，位相不変性

に結びついた，保存ベクトル・カレントは，$\delta\psi = -i\alpha\psi$ に対して，$\delta\psi^c = +i\alpha\psi^c$ になることに注意すれば，(3.36b) から

$$J^\mu(x) = \frac{i}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] = \frac{i}{2}[\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) - \overline{\psi}^c(x)\gamma^\mu\psi^c(x)] \tag{3.46}$$

に変化する．

Weyl 表示では，

$$\begin{aligned}\psi^c(x) = \begin{pmatrix}\xi(x)\\ \overline{\eta}(x)\end{pmatrix}^c &= \eta_C \begin{pmatrix}-\varpi & 0_2\\ 0_2 & \varpi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\eta}^*(x)\\ \xi^*(x)\end{pmatrix}\\ &= \eta_C \begin{pmatrix}-\varpi\overline{\eta}^*(x)\\ \varpi\xi^*(x)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.47}$$

となるので，Weyl 方程式 (3.29a,b) は荷電共役変換のもとで再び入れ替わる．

$$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) = 0 \underset{C}{\longrightarrow} [\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\eta}(x)]^* = 0 \tag{3.48a}$$

$$\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\eta}(x) = 0 \underset{C}{\longrightarrow} [\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x)]^* = 0 \tag{3.48b}$$

ここで，行列 ϖ の性質 $\varpi^{-1}\sigma^{\mu\,*}\varpi = \overline{\sigma}^\mu$ を用いた．則ち，Weyl 方程式 (3.29a,b) はそれら自身では C-不変ではない．けれども，空間反転と組み合わせると，不変になる．則ち，CP-変換のもとで，

$$\xi(x) \underset{CP}{\longrightarrow} \xi^c(x_P) = \eta_P\eta_C\varpi\xi^*(x) \tag{3.49a}$$

$$\overline{\eta}(x) \underset{CP}{\longrightarrow} \overline{\eta}^c(x_P) = -\eta_P\eta_C\varpi\overline{\eta}^*(x) \tag{3.49b}$$

と変換し，再び行列 ϖ の性質を用いると，Weyl 方程式 (3.29a,b) はおのおのが CP-不変であることがわかる．

ここで，荷電共役変換の物理的意味 (3.25a) を調べるため，$\psi(x)$ で記述される Dirac 粒子 (例えば電子) が電荷 $-e$ $(e > 0)$ を担っている場合の Dirac 方程式は，電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ を用いて，電子の電磁相互作用を記述する

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) + m)\psi(x) = 0 \tag{3.50a}$$

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x)) + m)\psi^c(x) = 0 \tag{3.50b}$$

の形になることを使う．(3.50a) から (3.50b) を得る際，(3.29d) から (3.30a) を導くのと同じ操作を行ったが，電磁場を記述する電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ が実数であることを使った．(3.50a,b) を比較すれば，$\psi(x)$ で記述される電子が電荷 $-e$ を持っているのに対し，$\psi^c(x)$ で記述される粒子は電荷 $+e$ を持ち，他の性質は電子とうり二つであることがわかる．これが陽電子と呼ばれ，荷電共役変換 $\psi \leftrightarrow \psi^c$ は電子と陽電子 (反電子)，一般に粒子と反粒子を入れ替える操作 (3.25a)に対応する．荷電共役変換という数学的操作は，反粒子がはじめて認識された Dirac 場に対して導入されたのだが，(3.25a) を荷電共役変換と呼んだのは，スカラー場に限らない一般的な場合に当てはまる．それ故，荷電共役変換 (C-変換) のもとで Dirac 方程式やスカラー場の方程式，一般に相対論的不変な量子力学で現れる方程式が不変であるとは，粒子と反粒子の入れ替えのもとで，方程式が不変に留まることを主張する．ところが，電荷を持たない粒子の場合は，粒子と反粒子が同じ可能性がある．スピン 1/2 の粒子に対してこれは条件

$$\psi^c(x) = \psi(x) \tag{3.51}$$

が成り立つ場合に実現する．この条件を **Majorana 条件**という．Dirac 行列の Majorana 表示 (2.41b) では，荷電共役行列が (3.31c) で与えられることに注意すると，$\psi^c = C\overline{\psi}^T = C(i\gamma^0)^T\psi^* = C(i\gamma^0)^T C^{-1}C\psi^* = (-i\gamma^0)(-i\gamma^0)\psi^* = \psi^*$ となるので，Majorana 条件 (3.51) は $\psi = \psi^*$ に導く．これは実数のスピノル，つまり Majorana スピノルを意味する．従って，Majorana スピノルは Majorana 条件に従う Dirac スピノルのことである．Majorana スピノルは荷電共役変換のもとで変わらない．

なお，荷電共役変換 $\psi \to \psi^c$ は反線形である[11)]が，(3.45) の C-不変なラグランジアンは，(古典論の段階で) 線形な荷電共役変換に従う場でかける．この点については，第 5 章の四元数 Dirac 理論のところで詳しく議論したい．この節では，断らない限り，(3.32b) のラグランジアンに基づて計算を進める．

5. 時間反転 (T) 不変性

時間反転のもとで，古典的 Dirac 場が

$$\psi'(x_T) = \eta_T R \psi^*(x), \quad \overline{\psi}'(x_T) = i\eta_T^* \psi^T(x) R^{-1}\gamma^0, \quad |\eta_T|^2 = 1 \qquad (3.52)$$

と変換すれば，Dirac 方程式は不変[12)]．ここで，ユニタリ行列 R は条件 $R^{-1}\gamma^\mu R = \gamma_\mu^*$ に従う．この条件を満たす R は，荷電共役行列の性質を利用して，$R = \gamma_5 C$ とおいて得られる．C の反対称性と $C\gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5$ から，R も反対称である．

6. CPT 不変性

CPT 変換

$$\begin{aligned}\psi'(-x) &= \eta_\theta \gamma_5 \psi(x)\\ \overline{\psi}'(-x) &= -\eta_\theta^* \overline{\psi}(x)\gamma_5, \quad \eta_\theta = \eta_T \eta_P^* \eta_C^*, \quad |\eta_\theta|^2 = 1 \qquad (3.53)\end{aligned}$$

のもとで，Dirac 方程式は不変である．これは線形な変換なので，$S(\Lambda_{st}) = \gamma_5$ とすれば，(2.44a) は

$$S^{-1}(\Lambda_{st})\gamma^\mu S(\Lambda_{st}) = -\gamma^\mu$$

のように満たされている．ただし，(2.44b) は符号が反転して，

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda_{st})\gamma^0 = +S^{-1}(\Lambda_{st})$$

となる．上の変換は，T, P, C の順で場に変換を施した場合に得られる．

次に，Dirac 方程式の解をフーリエ変換の方法で求める．いま，平面波解を $\psi(x) = u(p)e^{ipx}$ とおくと，$u(p)$ は $(i\gamma\cdot p + m)u(p) = 0$ を恒等的に満たす．この同次方程式が自明でない解を持つためには，係数行列から作られる行列式がゼロでなくてはならない．これから，$p^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ となって[13)]，Lorentz 不変性に起因する正・負のエネルギー解が存在することがわかる．さらに，$u(p)$ の満たす式を $hu(p) = p^0 u(p)$ とかくと，‘ハミルトニアン’ は $h = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + m\beta$, ($\boldsymbol{\alpha} = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = i\gamma^0$) で与えられる．ところが，このハミルトニアンは，ヘリシティ演算子 (の 2 倍) $H(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma}/|\boldsymbol{p}|, \boldsymbol{\Sigma} = i(S^{23}, S^{31}, S^{12})$ と交換する．ここで，$S^{\mu\nu}$ は (2.38) で与えられる．ところが，$H(\boldsymbol{p})$ の固有値は ± 1 である．ゆえに，h と $H(\boldsymbol{p})$ の同時固有関数は 4 つに限る．一般解は 4 つの解の重畳で与えられる．

$$\psi(x) = \sum_{r=\pm} \int_{\boldsymbol{p}} [a(\boldsymbol{p}, r) u^{(r)}(p) e^{ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p}, r) v^{(r)}(p) e^{-ipx}] \tag{3.54a}$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{r=\pm} \int_{\boldsymbol{p}} [a^\dagger(\boldsymbol{p}, r) \overline{u}^{(r)}(p) e^{-ipx} + b(\boldsymbol{p}, r) \overline{v}^{(r)}(p) e^{ipx}] \tag{3.54b}$$

$$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

Dirac スピノル, $u^{(r)}(p), v^{(r)}(p)$ は行列方程式

$$(i\gamma \cdot p + m) u^{(r)}(p) = \overline{u}^{(r)}(p)(i\gamma \cdot p + m) = 0 \tag{3.55a}$$

$$(-i\gamma \cdot p + m) v^{(r)}(p) = \overline{v}^{(r)}(p)(-i\gamma \cdot p + m) = 0 \tag{3.55b}$$

に従う.

ガンマ行列の標準表示 (2.41a) においては, (3.55) の解は,

$$u^{(\pm)}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}} \begin{pmatrix} (p^0 + m) w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}) \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}) \end{pmatrix} \tag{3.56a}$$

$$v^{(\pm)}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \varpi w^{(\pm)*}(\hat{\boldsymbol{p}}) \\ (p^0 + m) \varpi w^{(\pm)*}(\hat{\boldsymbol{p}}) \end{pmatrix} \tag{3.56b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \pm w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}), \quad \hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{3.56c}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \varpi w^{(\pm)*} = -\varpi \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hat{\boldsymbol{p}} w^{(\pm)*} = \mp \varpi w^{(\pm)*} \tag{3.56d}$$

で与えられる. ここで, ヘリシティ・スピノル $w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}})$ は, $\hat{\boldsymbol{p}}$ の天頂角を θ, 方位角を φ とすれば,

$$w^{(+)}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad w^{(-)}(\hat{\boldsymbol{p}}) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \tag{3.56e}$$

となる. 規格化は

$$\overline{u}^{(r)}(p) u^{(s)}(p) = -\overline{v}^{(r)}(p) v^{(s)}(p) = 2m\delta_{rs} \tag{3.56f}$$

と選んだ. すると, (3.55) から,

$$\overline{u}^{(r)}(p) i\gamma^\mu u^{(s)}(p) = \overline{v}^{(r)}(p) i\gamma^\mu v^{(s)}(p) = 2p^\mu \delta_{rs}$$

が得られる. また互いに直交する.

$$\overline{u}^{(r)}(p) v^{(s)}(p) = \overline{v}^{(s)}(p) u^{(r)}(p) = u^{(r)\dagger}(p) v^{(s)}(-\boldsymbol{p}, p^0)$$

$$= v^{(r)\dagger}(-\boldsymbol{p}, p^0)u^{(s)}(p) = 0 \tag{3.56g}$$

解の完全性は

$$\sum_{r=\pm}[u_\alpha^{(r)}(p)\overline{u}_\beta^{(r)}(p) - v_\alpha^{(r)}(p)\overline{v}_\beta^{(r)}(p)] = 2m\delta_{\alpha\beta} \tag{3.56h}$$

と表される．ここで，$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ は Dirac スピノルの成分を表す．左辺各項は，

$$\sum_{r=\pm} u_\alpha^{(r)}(p)\overline{u}_\beta^{(r)}(p) = (-i\gamma\cdot p + m)_{\alpha\beta} \tag{3.56i}$$

$$\sum_{r=1,2} v_\alpha^{(r)}(p)\overline{v}_\beta^{(r)}(p) = (-i\gamma\cdot p - m)_{\alpha\beta} \tag{3.56j}$$

となっている．(3.56f~j) の完全規格直交化条件はもちろん表示によらない．標準表示で得られる次の関係

$$v^{(r)}(p) = C\overline{u}^{(r)T}(p), \quad u^{(r)}(p) = C\overline{v}^{(r)T}(p) \tag{3.57a}$$

も表示によらない．この関係を (3.54b) に使うと，

$$\psi^c(x) = C\overline{\psi}^T(x) = \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[a^\dagger(\boldsymbol{p}, r)v^{(r)}(p)e^{-ipx} + b(\boldsymbol{p}, r)u^{(r)}(p)e^{ipx}] \tag{3.57b}$$

となり，丁度 (3.54a) で $a(\boldsymbol{p}, r) \leftrightarrow b(\boldsymbol{p}, r)$ としたものになっている．あるいは，後の便利のために，この式に左から γ_5 を掛け，(3.57a) の記号に戻って，

$$\begin{aligned}\gamma_5\psi^c(x) = \gamma_5 C\overline{\psi}^T(x) = \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[&a^\dagger(\boldsymbol{p}, r)(\gamma_5 C\overline{u}^{(r)T}(p))e^{-ipx} \\ &+ b(\boldsymbol{p}, r)(\gamma_5 C\overline{v}^{(r)T}(p))e^{ipx}]\end{aligned} \tag{3.57c}$$

を求めておこう．

3.3　Dirac 場の正準量子化

スカラー場の理論と同じように，フーリエ成分 $a(\boldsymbol{p}, r), b(\boldsymbol{p}, r), a^\dagger(\boldsymbol{p}, r), b^\dagger(\boldsymbol{p}, r)$ は，後にそれぞれ，粒子，反粒子の消滅・生成演算子として解釈される．これらが，どのようにして，量子力学的演算子に格上げされるかを見よう．(3.32b) のラグランジアン $\mathcal{L}_D$ により定義される正準運動量とハミルトニアンは

$$\pi^\dagger = \mathcal{L}_D \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2}\psi^\dagger \tag{3.58a}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = -\frac{i}{2}\psi \tag{3.58b}$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\boldsymbol{x}\mathcal{H}(x) = \int d^3\boldsymbol{x}[\pi^\dagger(x)\dot{\psi}(x) + \dot{\psi}^\dagger(x)\pi(x) - \mathcal{L}_D(x)] \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\overline{\psi}(\frac{1}{2}\gamma^i\overleftrightarrow{\partial}_i + m)\psi \end{aligned} \tag{3.58c}$$

となる．ここで，$\pi^\dagger$ に対して，右微分を用いた理由は，$\pi^\dagger$ が π のエルミート共役に等しくなるようにするため (ψ は Grassmann 変数なので，上の微分は Grassmann 微分)．このハミルトニアンはエルミートで，(3.35b) の P^0 に等しい：$H = P^0$．Hamilton の正準方程式

$$i\dot{\psi}(\boldsymbol{x},t) = [\psi(\boldsymbol{x},t), H] \tag{3.59}$$

が運動方程式に一致する同時刻正準交換関係は

$$\begin{aligned} &[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t), \psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\pm = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ &[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t), \psi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\pm = 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

で与えられる[14)]．

前節で複素スカラー場を議論したときと同様に，(3.60) で与えられる ± どちらの交換子積をとっても，

$$\begin{aligned} &[Q, \psi(x)] = -\psi(x) \\ &[Q, \overline{\psi}(x)] = \overline{\psi}(x) \end{aligned} \tag{3.61}$$

が導かれる．ただし，

$$Q = \int d^3\boldsymbol{x} J^0(\boldsymbol{x},t) = \int d^3\boldsymbol{x}\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{3.62}$$

は保存則 (3.36b) により，Lorentz スカラーで，時間的に変わらない．従って，量子化された Dirac 場 $\psi(x)$ は Q の固有値を 1 減らす演算子で，$\overline{\psi}(x)$ は Q の固有値を 1 増やす演算子となる．この解釈を (3.54a) に対して適用すれば，フーリエ成分 $a(\boldsymbol{p},r), b^\dagger(\boldsymbol{p},r); a^\dagger(\boldsymbol{p},r), b(\boldsymbol{p},r)$ は Q の固有値 1 を持つ粒子を消滅;

生成する演算子として解釈されねばならない．しかしながら，$b^\dagger(\boldsymbol{p},r), b(\boldsymbol{p},r)$ は負エネルギー解に対応するフーリエ成分なので，それぞれ，負エネルギーの粒子を消滅・生成する演算子となる．ところが，Pauli 原理を用いた Dirac の空孔理論によれば，負エネルギーの粒子の欠損は，正エネルギーを持ち，Q の固有値が反対符号を持つ反粒子の存在とみなされる．それ故，$b^\dagger(\boldsymbol{p},r), b(\boldsymbol{p},r)$ は反粒子を生成・消滅する演算子と解釈される．同じ解釈は既にスカラー場のときに行ったが，その場合には Pauli 原理は適用できない．従って，場の量子論では，非負のエネルギーの最低状態としての真空の定義を優先する．

ところが，複素スカラー場が交換関係でもって量子化されたのに対し，Dirac 場は反交換関係を使って量子化されねばならないことが，次のようにしてわかる．

Dirac 場は複素スピノル場なので，2 つの実スピノル場 $\chi_1(x), \chi_2(x)$ を用いて

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1(x) + i\chi_2(x)) \tag{3.63}$$

のように表せる．(3.28c,d) から，Majorana スピノル $\chi_1(x), \chi_2(x)$ は Dirac スピノル $\psi(x)$ と同じ Lorentz 変換性を示す．古典論では，$\psi(x)$ が Grassmann 変数なので，$\chi_1(x), \chi_2(x)$ も Grassmann 変数である．特に $\chi_1(x)$ と $\chi_2(x)$ は反可換である．

分解 (3.63) を用いるときは，Majorana 表示の Dirac 行列 (2.41) を用いねばならない．この表示では，γ^0 は反対称であるが，$\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ は対称行列になるので，(3.32b) の Dirac ラグランジアンは，

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}\overline{\chi}_1(\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\chi_1 - \frac{1}{2}\overline{\chi}_2(\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\chi_2 \tag{3.64}$$

のように分離する．このとき，正準運動量とハミルトニアンは

$$\pi_n^\dagger = \mathcal{L}_D\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\dot{\chi}_n}} = \frac{i}{4}\chi_n^T, \quad (n = 1, 2) \tag{3.65a}$$

$$\pi_n = \frac{\partial}{\partial\dot{\chi}_n^T}\mathcal{L}_D = -\frac{i}{4}\chi_n, \quad (n = 1, 2) \tag{3.65b}$$

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\boldsymbol{x}\mathcal{H}(x) = \int d^3\boldsymbol{x} \sum_{n=1,2}[\pi_n^\dagger(x)\dot{\chi}_n(x) + \dot{\chi}_n^T(x)\pi_n(x) - \mathcal{L}_D(x)] \\ &= \sum_{n=1,2}\int d^3\boldsymbol{x}\overline{\chi}_n\left(\frac{1}{4}\gamma^i\overleftrightarrow{\partial}_i + \frac{1}{2}m\right)\chi_n \end{aligned} \tag{3.65c}$$

となる．ここで，Hamilton の正準方程式

$$i\dot{\chi}_n(\boldsymbol{x},t)=[\chi_n(\boldsymbol{x},t),H],\quad n=1,2 \tag{3.66}$$

が運動方程式 (3.29c) に一致する同時刻正準交換関係は

$$[\chi_{n,\alpha}(\boldsymbol{x},t),\chi_{m,\beta}(\boldsymbol{x}',t)]_\pm=\delta_{nm}\,\delta_{\alpha\,\beta}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\quad n,m=1,2 \tag{3.67}$$

となるが，これが無矛盾であるためには，+ の交換子積をとらねばならない．従って，Majorana スピノルは反交換関係で量子化される．Majorana スピノルが反交換関係で量子化されるなら，(3.63) から Dirac スピノルも反交換関係で量子化されるべきことが導かれる．則ち，

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}&=\delta_{\alpha\,\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\ \{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}&=0\end{aligned} \tag{3.68}$$

が成り立つ．ここで，反交換子積を $[A,B]_+=\{A,B\}$ とかく約束に従った．生成・消滅演算子の交換関係に翻訳すれば，

$$\begin{aligned}\{a(\boldsymbol{p},r),a^\dagger(\boldsymbol{p}',r')\}&=(2\pi)^3 2p^0\delta_{rr'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\ \{b(\boldsymbol{p},r),b^\dagger(\boldsymbol{p}',r')\}&=(2\pi)^3 2p^0\delta_{rr'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\ \text{他の反交換関係}&=0\end{aligned} \tag{3.69}$$

となる．則ち，Dirac 場で記述されるスピン 1/2 の粒子は Fermi-Dirac 統計に従う．これとスカラー粒子の場合を比べると，粒子の統計はスピンによることがわかる．実際，一般的にスピン整数の粒子は Bose-Einstein 統計に，スピン半整数の粒子は Fermi-Dirac 統計に従うことがわかっている．これを**スピンと統計の関係**という (理論の Lorentz 不変性，微視的因果律，正定値計量を仮定すると成り立つ定理．この関係が成り立たないが，理論的に要求される Faddeev-Popov ゴーストのような例もある)．スピン整数の粒子をボソンと呼ぶことは既に触れたが，スピン半整数の粒子は**フェルミオン**といわれる．

Dirac 場に対するこの結論は，分解 (3.63) と $\psi(x)$ の Grassmann 性から導かれ，スカラー場の量子化が分解 (3.11) と $\phi(x)$ が可換な普通の変数であることから導かれたのに対応する．しかしながら，この段階では，そもそもなぜ，$\psi(x)$ を Grassmann 変数とみなさねばならないかの疑問が残る．質量項を持つ

Majorana 場の古典論があるとすれば，その段階で，Grassmann 変数でなければならないが，予め Grassmann 変数を持ち込まないことにすれば，分解 (3.63) が用いられないから，別の理由で Dirac 場の量子化は反交換関係で実現されるべしとの結論が導かれるに違いない．そして，Majorana 条件を満たす Dirac 場が Majorana 場であることを使い，Majorana 場の量子化を実行するという手順を踏む必要がある．その結果 Grassmann 変数を初めから導入した上の議論が正当化できる．

そこで，Dirac 場の粒子・反粒子の消滅・生成演算子の交換関係を (3.69) の代わりに，

$$
\begin{aligned}
[a(\boldsymbol{p},r), a^\dagger(\boldsymbol{p}',r')]_\pm &= (2\pi)^3 2p^0 \delta_{rr'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \\
[b(\boldsymbol{p},r), b^\dagger(\boldsymbol{p}',r')]_\pm &= (2\pi)^3 2p^0 \delta_{rr'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \\
\text{他の交換関係} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

と仮定する．このとき，Dirac スピノル場の真空 $|0\rangle$ は，条件 $a(\boldsymbol{p},r)|0\rangle = b(\boldsymbol{p},r)|0\rangle = 0$ によって定義していることに注意されたい．(3.70) を使って，場のゼロと異なる同時刻交換関係を表せば，

$$
\begin{aligned}
[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\pm = i\gamma^0_{\alpha\beta}\int_{\boldsymbol{p}} p^0[e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \pm e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}] \\
+ (m \mp m)\delta_{\alpha\beta}\int_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

となる．これが同時刻正準交換関係 (3.60) を再現するのは，明らかに，$[\ ,\ ]_+$ の方だけである．このようにして，Dirac 場の量子化は反交換関係によってなされるべきであることがわかる．Majorana 場 $\chi(x) = \psi(x)$ に対しては，Majorana 条件 (3.51) により，$a(\boldsymbol{p},r) = b(\boldsymbol{p},r)$ なので，交換関係として (3.71) のみが得られる．(3.71) に $-C^{-1}_{\beta\gamma}$ をかけると，Majorana 表示では，$C = -i\gamma^0$ だから，

$$
\begin{aligned}
[\chi_\alpha(\boldsymbol{x},t), \chi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\pm = \delta_{\alpha\beta}\int_{\boldsymbol{p}} p^0[e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \pm e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}] \\
+ (m \mp m)i\gamma^0_{\alpha\beta}\int_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

となるが，同時刻交換関係は必ず $\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ に比例しなければならないから，

矛盾のない交換関係は，(3.72) で + の方をとった場合に限る．

$$\{\chi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\chi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.73}$$

このようにして，$\psi(x)$ の Grassmann 性と分解 (3.63) を用いた議論は正当化された．則ち，量子論を前提にする以上は，古典的な Dirac 場 は Grassmann 変数でなければならないし，古典的な Majorana 場も存在するとして議論を進めることができる．これは，経路積分の方法と一致するが，Grassmann 変数は観測可能ではないので，波動関数という観測可能でない量を基本にとる量子力学と違った意味にしても，新種の観測不可能量にもとづいて，量子論の展開が要求されていると言わざるを得ない．この本では取り扱わないが，例えば，非可換ゲージ理論では，古典的には Grassmann 的なスカラー場 (Faddeev-Popov ゴースト) を考える．このようなスカラー場は観測可能でないので，スピンと統計の関係が破れ，スピン 0 であるにも拘わらず，Fermi-Dirac 統計に従う．

消滅・生成演算子に関しては (3.69) となる．このとき，ハミルトニアンは負の無限大のゼロ点振動を除いて，

$$H=\sum_{r=1,2}\int_{\boldsymbol{p}}p^0[a^\dagger(\boldsymbol{p},r)a(\boldsymbol{p},r)+b^\dagger(\boldsymbol{p},r)b(\boldsymbol{p},r)]$$

となる．なお，反交換関係 (3.69) を使って，自由場に対する Lorentz 不変な反交換関係

$$\{\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')\}=-i(\gamma\cdot\partial-m)_{\alpha\beta}\Delta(x-x';m^2) \tag{3.74a}$$

$$\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x')\}=0,\quad(\alpha,\beta=1,2,3,4) \tag{3.74b}$$

が導ける．ただし，$\Delta(x-x';m^2)$ は (3.19b) で定義された Pauli–Jordan の不変デルタ関数である．そこで述べた性質 $\Delta(x-x';m^2)=0$, $(x-x')^2>0$ から，Dirac 場の双 1 次形式でかかれるオブザーバブル $\overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ は微視的因果律を満足する．

$$[\overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x),\overline{\psi}(x')\Gamma'\psi(x')]=0,\quad(x-x')^2>0\ \text{のとき} \tag{3.74c}$$

ここで，演算子 A,B,C,D に対する公式

$$[AB,CD]=A[B,C]_\pm D-C[D,A]_\pm B+CA[B,D]_\pm-[C,A]_\pm BD$$

の $[\ ,\ ]_+$ の方を使った．(3.74c) が場の量子論において要求される Dirac 場に対する微視的因果律である．

(3.33) から (3.36a), (3.37), (3.43) (3.52), (3.53) までに述べた古典場に対する変換性は，量子化された場に対する次のような変換性に翻訳される．翻訳の基本は，量子場に対する次のような変換則である．演算子場に対しても，同じ記号を使うことにして，それらが作用するヒルベルト空間の任意のベクトルを $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ とする．いま，系に対する対称変換が $|\alpha\rangle \to |\alpha'\rangle, |\beta\rangle \to |\beta'\rangle$ で表されるとする．その際，場の演算子 A が A' に変換されるとすると，$\langle\beta'|A|\alpha'\rangle = \langle\beta|A'|\alpha\rangle$ である．これが対称変換であるのは，遷移確率が不変に留まる，即ち，$|\langle\beta'|\alpha'\rangle| = |\langle\beta|\alpha\rangle|$ が成り立つときに限る．Wigner の定理によって，このような対称変換はユニタリ変換

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \tag{3.75a}$$

か反ユニタリ変換

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{3.75b}$$

に限られる．ユニタリ変換の場合には，ユニタリ演算子 U を用いて，

$$|\alpha'\rangle = U|\alpha\rangle, \qquad U^\dagger U = 1 \tag{3.75c}$$

とかける．恒等変換はユニタリ演算子に対応するから，無限小変換によって生成される対称変換は連続性から必ずユニタリ変換で記述される．従って，Poincaré 変換と位相変換はユニタリである．Poincaré 変換と無関係な荷電共役変換もユニタリ演算子でかける．空間反転もユニタリ演算子でかけることは前節 (3.24a) で見た．しかし，(3.26a)，(3.26c) で知ったように時間反転は反ユニタリになる．

古典場 $\psi(x)$ に対応する量子場の行列要素 $\langle\beta|\psi(x)|\alpha\rangle$ はユニタリ変換に対して，変換後は $\langle\beta'|\psi(x')|\alpha'\rangle = \langle\beta|U^{-1}\psi(x')U|\alpha\rangle$ となる (ただし，位相変換の場合は，$x' = x$ である)．これが，$\langle\beta|\psi'(x')|\alpha\rangle$ に等しいのであるから，量子場の変換則は古典場のそれから，

$$U\psi'(x')U^{-1} = \psi(x') \tag{3.76}$$

と導かれる．ただし，考えている変換のもとで，$\psi'(x')$ は古典場と同じ関係で $\psi(x)$ に結びついている．特に，連続変換の場合には，無限小変換，$\psi'(x) =$

$\psi(x)+\delta^*\psi(x)$，を考えることができて，

$$U=e^X \doteqdot 1+X, \qquad X^\dagger=-X \tag{3.77a}$$

とおけば

$$-\delta^*\psi(x)=[X,\psi(x)] \tag{3.77b}$$

が得られる．これをスカラー場の Poincaré 変換に適用したのが (3.21) である．

以上のことを，まず連続変換である Poincaré 変換と位相変換，次に離散変換について述べてみよう．

1.′ Poincaré 不変性

固有 Poincaré 変換 $x\to x'=\Lambda x+a,\ \ \Lambda\in L_+^\uparrow$，のもとで，量子場は

$$U(\Lambda,a)\psi(x)U^{-1}(\Lambda,a)=S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x+a) \tag{3.78a}$$

$$U(\Lambda,a)\overline{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda,a)=\overline{\psi}(\Lambda x+a)S(\Lambda) \tag{3.78b}$$

と変換する．ここで，$U(\Lambda,a)$ は固有 Poincaré 群の連続なユニタリ表現である．この式にフーリエ展開式 (3.54a) を代入すれば，

$$\begin{aligned}U(\Lambda,a)\psi(x)U^{-1}(\Lambda,a)=&\sum_{r=1,2}\int_{\boldsymbol{p}}\Big[U(\Lambda,a)a(\boldsymbol{p},r)U^{-1}(\Lambda,a)u^{(r)}(p)e^{ipx}\\&\qquad+U(\Lambda,a)b^\dagger(\boldsymbol{p},r)U^{-1}(\Lambda,a)v^{(r)}(p)e^{-ipx}\Big]\\=&\sum_{r=1,2}\int_{\boldsymbol{p}}\Big[a(\boldsymbol{p},r)S^{-1}(\Lambda)u^{(r)}(p)e^{ip(\Lambda x+a)}\\&\qquad+b^\dagger(\boldsymbol{p},r)S^{-1}(\Lambda)v^{(r)}(p)e^{-ip(\Lambda x+a)}\Big]\end{aligned}$$

となり，$a(\boldsymbol{p},r),b^\dagger(\boldsymbol{p},r)$ の Poincaré 変換性を求めるには，Dirac スピノル u,v の Lorentz 変換を求めればよい．そこで，第 2 章 (2.63a)，(2.63b) に習って， Lorentz 変換 Λ^{-1} を次のように分解する．

$$\Lambda^{-1}=L_{\Lambda^{-1}p}(L^{-1}_{\Lambda^{-1}p}\Lambda^{-1}L_p)L_p^{-1}\equiv L_{\Lambda^{-1}p}\Lambda_{\mathring{p}}L_p^{-1},\quad \Lambda_{\mathring{p}}\,\mathring{p}=\mathring{p}$$

いま $p^2=-m^2<0$ で $p^0>0$ なので，$\mathring{p}=(m,0,0,0)$．$u(p,r)=S(L_p)u(\mathring{p},r)$ と定義すると，

$$S^{-1}(\Lambda)u(p,r)=S(L_{\Lambda^{-1}p})S(\Lambda_{\mathring{p}})S(L_p^{-1})u(p,r)$$

$$= S(L_{\Lambda^{-1}p})S(\Lambda_{\overset{\circ}{p}})u(\overset{\circ}{p}, r)$$
$$= \sum_{r'=\pm} S(L_{\Lambda^{-1}p})u(\overset{\circ}{p}, r')D^{\frac{1}{2}}_{r'r}(\Lambda_{\overset{\circ}{p}})$$
$$= \sum_{r'=\pm} u(\Lambda^{-1}p, r')D^{\frac{1}{2}}_{r'r}(\Lambda_{\overset{\circ}{p}})$$

ただし，$D^{\frac{1}{2}}_{r'r}(\Lambda_{\overset{\circ}{p}})$ は (ヘリシティ・基底における) 回転群の 2 次のユニタリな表現行列である．運動量空間の積分は Lorentz 不変なので，上式から，$a(\boldsymbol{p}, r) = a(p, r)$ とかけば，

$$U(\Lambda, a)a(p, r)U^{-1}(\Lambda, a) = e^{i(\Lambda p)a} \sum_{r'=\pm} a(\Lambda p, r')D^{\frac{1}{2}}_{r'r}(\Lambda_{\overset{\circ}{p}}) \tag{3.78c}$$

$b^{\dagger}$ についても同様である．

明らかにこの変換のもとで $\mathcal{L}_D$ は次のように変換する．

$$U(\Lambda, a)\mathcal{L}_D(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{L}_D(\Lambda x + a) \tag{3.79}$$

従って，作用 $\int d^4x \mathcal{L}_D(x)$ は Poincaré 不変である．

ここで，推進変換，$x \to x' = x + a$，を考える．そのユニタリ表現は 1 次元で，

$$U(1, a) = e^{-iP^{\mu}a_{\mu}} \tag{3.80a}$$

で与えられる．ただし，エルミート演算子 P^{μ} は量子場でかかれた，(3.35b) である．無限小推進変換，$a = \varepsilon$，に対しては，

$$U(1, \varepsilon) = e^{-iP^{\mu}\varepsilon_{\mu}} \fallingdotseq 1 - iP^{\mu}\varepsilon_{\mu} \tag{3.80b}$$

となるから，(3.77) の $X = -iP^{\mu}\varepsilon_{\mu}$ となり，今の場合 $\delta^*\psi(x) = -\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)$ だから，(3.77b) は

$$i\partial^{\mu}\psi(x) = [P^{\mu}, \psi(x)] \tag{3.81}$$

を意味する．$P^0 = H$ はハミルトニアンなので，(3.81) の時間成分は (3.59) に等しい．P^{μ} の間の交換関係は，ヤコービの恒等式

$$[P^{\mu}, [P^{\nu}, \psi(x)]] + [P^{\nu}, [\psi(x), P^{\mu}]] + [\psi(x), [P^{\mu}, P^{\nu}]] = 0$$

から

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{3.82}$$

となることがわかる．この場合，真空は P_μ の固有状態ならどんな固有値を持っていてもよい．しかし，普通場の量子論の公理として，真空の推進不変性は仮定する．すなわち，真空 $|0\rangle$ は $P_\mu|0\rangle = 0$ を満足すると仮定する．しかし，真空の推進不変性は (3.82) の必要条件ではあるが，十分条件ではない．一方，無限小 Lorentz 変換，$x \to x' = x + \omega x$，の場合には，量子場でかかれた反エルミートな演算子 (3.35f) を用いて，

$$U(\Lambda, 0) = e^{-\frac{1}{4}M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \fallingdotseq 1 - \frac{1}{4}M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \tag{3.83a}$$

となる．従って，(3.77) の $X = -\dfrac{1}{4}M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$ である．(3.77b) は $\delta^*\psi(x) = -\dfrac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(S^{\rho\sigma} - 2il^{\rho\sigma})\psi(x)$，であることを思い出して，

$$-(S^{\mu\nu} - 2il^{\mu\nu})\psi(x) = [M^{\mu\nu}, \psi(x)] \tag{3.83b}$$

に導く[15]．$M^{\mu\nu}$ の間の交換関係は，再びヤコービの恒等式

$$[M^{\mu\nu}, [M^{\rho\sigma}, \psi(x)]] + [M^{\rho\sigma}, [\psi(x), M^{\mu\nu}]] + [\psi(x), [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]] = 0 \tag{3.83c}$$

から導けて，真空の Lorentz 不変性を使うと (2.59c) に一致することが確かめられる．

$M^{\mu\nu}$ と P^ρ の交換関係も再びヤコービの恒等式を用いれば (2.59b) を得る．ただし，真空は Poincaré 不変 (= Lorentz 不変+ 推進不変) とする．

2.′ 位相不変性

位相変換を与えるユニタリ演算子を U とかけば，

$$U\psi(x)U^{-1} = e^{i\alpha}\psi(x), \quad \alpha：\text{実の定数}$$

のもとで，$\mathcal{L}_D$ は不変．無限小変換 $\alpha = \varepsilon$ のとき，(3.62) の Q を用いて，$U = e^{-i\varepsilon Q} \fallingdotseq 1 - i\varepsilon Q$ とおけば，(3.61) が再度導かれる．

3.′ 空間反転 (P) 不変性

空間反転のユニタリ演算子を $\mathcal{P}$ とかけば，変換

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = i\eta_P^*\gamma^0\psi(x_P) \tag{3.84a}$$

$$\mathcal{P}\overline{\psi}(x)\mathcal{P}^{-1} = i\eta_P\overline{\psi}(x_P)\gamma^0 \tag{3.84b}$$

のもとで，$\mathcal{L}_D(x)$ は

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_D(x)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}_D(x_P) \tag{3.84c}$$

となる．生成・消滅演算子については，(3.84) に (3.54a) を代入して，$w^{(\pm)}(-\boldsymbol{p}) = iw^{(\mp)}(\boldsymbol{p})$ から得られる関係式

$$\gamma^0 u^{(r)}(-\boldsymbol{p}, p^0) = u^{(-r)}(\boldsymbol{p}, p^0) \tag{3.85a}$$

$$\gamma^0 v^{(r)}(-\boldsymbol{p}, p^0) = -v^{(-r)}(\boldsymbol{p}, p^0) \tag{3.85b}$$

を使えば，次の変換則を得る．

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{c} a(\boldsymbol{p}, r) \\ b(\boldsymbol{p}, r) \end{array}\right\}\mathcal{P}^{-1} = \left\{\begin{array}{c} i\eta_P^* a(-\boldsymbol{p}, -r) \\ i\eta_P b(-\boldsymbol{p}, -r) \end{array}\right\} \tag{3.86}$$

この式から，粒子と反粒子の相対的偶奇性は，互いに反対符号であることがわかる．すなわち，$(i\eta_P^*)(i\eta_P) = -1$.

4! 荷電共役 (C) 不変性

ユニタリな荷電共役変換 の演算子を $\mathcal{C}$ とかけば，

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = \eta_C C\overline{\psi}^T(x) \tag{3.87a}$$

$$\mathcal{C}\overline{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} = -\eta_C^*\psi^T(x)C^{-1} \tag{3.87b}$$

のもとで，(3.29d) と (3.30d) は入れ替わるので，Dirac 方程式は不変に留まる．また (3.45) のラグランジアンは不変に留まる．$\psi(x)$ は量子化された場で，最早グラスマン変数ではないので，(3.32b) のラグランジアンは不変に留まらない (正規則をとれば，この限りではない)．なお，(3.46) の流れは C 変換のもとで，マイナス・サインがつく．

$$\mathcal{C}J^\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = \frac{i}{2}\mathcal{C}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)]\mathcal{C}^{-1} = -\frac{i}{2}[\overline{\psi}(x), \gamma^\mu\psi(x)] \tag{3.87c}$$

また，(3.50a) を　$\mathcal{C}\cdots\mathcal{C}^{-1}$ のように荷電共役変換すれば，電荷 e の符号

は変わらないから，

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x) \tag{3.87d}$$

として，(3.50b) を得る．従って，光子の C パリティはマイナスである．また，荷電共役変換のもとで，粒子・反粒子は入れ替わる．

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},r)\mathcal{C}^{-1} = \eta_C b(\boldsymbol{p},r) \tag{3.88a}$$

$$\mathcal{C}b^\dagger(\boldsymbol{p},r)\mathcal{C}^{-1} = \eta_C a^\dagger(\boldsymbol{p},r) \tag{3.88b}$$

5′ 時間反転 (T) 不変性

スカラー場の理論で見たように，時間反転は反ユニタリ変換で記述される．その数式上の意味をここで改めて要点のみ記そう．反ユニタリ変換の場合にも，反ユニタリ演算子 $\mathcal{T}$ の存在を仮定することは (3.26) で述べた通りであるが，状態ベクトルに対する作用を

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{T}|\alpha\rangle \equiv |\mathcal{T}\alpha\rangle, \qquad |\beta'\rangle = \mathcal{T}|\beta\rangle \equiv |\mathcal{T}\beta\rangle \tag{3.89a}$$

とかく．$\mathcal{T}$ が反ユニタリ演算子であるとは，条件

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{3.89b}$$

$$\mathcal{T}(\lambda_1|\alpha_1\rangle + \lambda_2|\alpha_2\rangle) = \lambda_1^*\mathcal{T}|\alpha_1\rangle + \lambda_2^*\mathcal{T}|\alpha_2\rangle, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \tag{3.89c}$$

が成り立つことをいう．特に，(3.89c) を満たす演算子 $\mathcal{T}$ を**反線形演算子**という．時間反転の演算子 $\mathcal{T}$ が反線形であることから，

$$\mathcal{T}(i|\alpha\rangle) = (-i)\mathcal{T}|\alpha\rangle = (\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1})\mathcal{T}|\alpha\rangle$$

によって，(3.26c)

$$\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i \tag{3.89d}$$

が導かれることにまず注意しておこう．いま，反ユニタリ演算子 $\mathcal{T}$ がケット・ベクトルに作用するとは，$\mathcal{U}$ をあるユニタリ演算子として，

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{T}|\alpha\rangle = \mathcal{U}\,|\alpha\rangle^* \tag{3.90a}$$

であると定義する[16)]．これにより，$\mathcal{T}$ の反線形性 (3.89c) は容易に確かめられる．(3.89b) を証明するため，任意のケット・ベクトルが正規直交基底の完全系 $\{\,|n\rangle\,\}$ で展開できたとする．

$$|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle\,|n\rangle \tag{3.90b}$$

時間反転演算子の反線形性 (3.89c) から，この状態に $\mathcal{T}$ を作用させると，

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{T}|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle^* \mathcal{U}\,|n\rangle^* \tag{3.90c}$$

が導かれる．展開 (3.90b) における完全系 $\{\,|n\rangle\,\}$ として，$|n\rangle^* = |n\rangle$ を満たすものを選ぶ．すると，(3.90c) は

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{T}|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle^* \mathcal{U}\,|n\rangle \tag{3.90d}$$

となる．それ故，

$$\langle\beta'|\alpha'\rangle = \sum_{n,m} \langle m|\beta\rangle\langle n|\alpha\rangle^*\langle m|\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\,|n\rangle = \sum_n \langle n|\beta\rangle\langle n|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|\beta\rangle \tag{3.90e}$$

が得られる．これは (3.89b) に他ならない[17]．

自由な Dirac 場の理論の時間反転対変性は，Dirac スピノルの特定の成分 (状態のラベルと重複しないよう必要になるまでこれを ψ_α とはかかないことにする) の行列要素に対して

$$\langle\beta'|\psi(x_T)|\alpha'\rangle = \langle\alpha|\psi'(x_T)|\beta\rangle = \langle\beta|\psi'^\dagger(x_T)|\alpha\rangle^* \tag{3.91a}$$

を意味する．ここで，最右辺に現れる $\psi'^\dagger(x_T)$ の $\dagger$ は考えているスピノルの成分に対する演算子のエルミート共役で，縦ベクトルを横ベクトルにするわけではない．そこで，

$$|\gamma\rangle = \psi'^\dagger(x_T)|\alpha\rangle \to \langle\gamma| = \langle\alpha|\psi'(x_T) \tag{3.91b}$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned}\langle\beta|\psi'^\dagger(x_T)|\alpha\rangle^* &= \langle\alpha|\psi'(x_T)|\beta\rangle = \langle\gamma|\beta\rangle = \langle\beta'|\gamma'\rangle \\ &= \langle\beta'|\mathcal{T}|\gamma\rangle = \langle\beta'|\mathcal{T}\psi'^\dagger(x_T)|\alpha\rangle \\ &= \langle\beta'|\mathcal{T}\psi'^\dagger(x_T)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\alpha\rangle = \langle\beta'|\mathcal{T}\psi'^\dagger(x_T)\mathcal{T}^{-1}|\alpha'\rangle\end{aligned} \tag{3.91c}$$

とかける．(3.91a) によって，これが任意の $\langle\beta'|, |\alpha'\rangle$ に対して，$\langle\beta'|\psi(x_T)|\alpha'\rangle$ に等しいので，演算子の関係として，

$$\mathcal{T}\psi'^{\dagger}_{\alpha}(x_T)\mathcal{T}^{-1} = \psi_\alpha(x_T), \quad (\alpha = 1,2,3,4) \tag{3.91d}$$

を得る．この式で，関係 (3.52) を使い，(3.89d) に注意して，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} &= \eta_T^* R^{-1}\psi(x_T) \\ \mathcal{T}\overline{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} &= \eta_T\overline{\psi}(x_T)R \end{aligned} \tag{3.91e}$$

が示せる．このとき，$\mathcal{T}\mathcal{L}_D(x)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}_D(x_T)$ となるが，ハミルトニアンは $t=0$ で計算してもよいから，$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H$ とその不変性が証明される．運動量演算子の方は符号が変わる：$\mathcal{T}P^i\mathcal{T}^{-1} = -P^i$．$M^{\mu\nu}$ についても変換性がわかり，Dirac スピノル場に対する (3.26d) が満たされている．

なお，時間反転のもとで，ヘリシティは変化しないが，$\hat{\boldsymbol{p}} \to -\hat{\boldsymbol{p}}$ となるので，ヘリシティ・スピノルは

$$w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}) \to w^{(\pm)}(-\hat{\boldsymbol{p}}) = \pm i\varpi w^{(\pm)*}(\hat{\boldsymbol{p}}) \tag{3.92a}$$

のように変化する．その結果，標準表示で，

$$\begin{cases} Ru^{(\pm)*}(-\boldsymbol{p},p^0) = \pm iu^{(\pm)}(\boldsymbol{p},p^0) \\ Rv^{(\pm)*}(-\boldsymbol{p},p^0) = \mp iv^{(\pm)}(\boldsymbol{p},p^0) \end{cases} \tag{3.92b}$$

となることが証明される．あるいは，ユニタリ行列 R が反対称であることを使うと，

$$\begin{cases} Ru^{(\pm)*}(\boldsymbol{p},p^0) = \mp iu^{(\pm)}(-\boldsymbol{p},p^0) \\ Rv^{(\pm)*}(\boldsymbol{p},p^0) = \pm iv^{(\pm)}(-\boldsymbol{p},p^0) \end{cases} \tag{3.92c}$$

も導かれる．それ故，(3.91e) に (3.54) を代入して，生成・消滅演算子が時間反転のもとで次のように変換することが示せる．

$$\begin{cases} \mathcal{T}a(\boldsymbol{p},\pm)\mathcal{T}^{-1} = \mp i\eta_T^* a(-\boldsymbol{p},\pm) \\ \mathcal{T}b^\dagger(\boldsymbol{p},\pm)\mathcal{T}^{-1} = \pm i\eta_T^* b^\dagger(-\boldsymbol{p},\pm) \\ \mathcal{T}a^\dagger(\boldsymbol{p},\pm)\mathcal{T}^{-1} = \pm i\eta_T a^\dagger(-\boldsymbol{p},\pm) \\ \mathcal{T}b(\boldsymbol{p},\pm)\mathcal{T}^{-1} = \mp i\eta_T b(-\boldsymbol{p},\pm) \end{cases} \tag{3.92d}$$

6.′ CPT 不変性

CPT 変換は，時間反転の反ユニタリ性から，反ユニタリ変換となり，

$$
\begin{aligned}
\Theta\psi(x)\Theta^{-1} &= \eta'_\theta(\gamma^0\gamma_5)^T\overline{\psi}^T(-x) \\
\Theta\overline{\psi}(x)\Theta^{-1} &= \eta'^*_\theta\psi^T(-x)(\gamma_5\gamma^0)^T \\
\eta'_\theta &= -i\eta^*_T\eta^*_P\eta_C, \quad |\eta'_\theta|^2 = 1
\end{aligned} \tag{3.93a}
$$

のもとで，$\Theta\mathcal{L}_D(x)\Theta^{-1} = \mathcal{L}_D(-x)$，および

$$
\Theta\left\{\begin{matrix} H \\ \boldsymbol{P} \\ J^\mu(x) \end{matrix}\right\}\Theta^{-1} = \left\{\begin{matrix} H \\ -\boldsymbol{P} \\ -J^\mu(-x) \end{matrix}\right\} \tag{3.93b}
$$

が示せる．ここで，$J^\mu(x)$ は (3.46) で与えられる．

自由場の量子化は，場の量子論の入門であり，しかもスカラー場や Dirac 場などはそのごく一部に過ぎない．ベクトル場，特にゲージ場の説明は一切省いた (非可換ゲージ場は本質的に相互作用場で，その矛盾のない量子化に必須の Faddeev-Popov ゴーストについては，スピンと統計の関係の破れに関し軽く触れたに過ぎない)．また，Feynmann 図や繰り込み理論を抜きにして場の量子論を議論できない．第 5 章 5.4 節でゲージ原理の簡単な説明を試みるが，それはあくまで後章 (6,7,8 章) で，ゲージ理論の具体的構成を行うことを視野に入れたもので，それも量子化には言及しなくて済む範囲を想定している．場の量子論の計算技法・繰り込みの概念，また特にゲージ理論については，良書[18)]が豊富にあるので，ここであらためて解説するのは，浅学の身にとっては甚だ恐れ多い．むしろ，本書の目的からすれば，このあたりで，当面の課題である，四元数と Lorentz 群の関係を議論するのが適切であろう．

第 3 章の注および参考文献

*1) この本では，ラグランジアン密度のことを単にラグランジアンと呼ぶ．一般相対論では一般座標変換のもとでスカラーとなる作用は，スカラー密度の 4 次元積分で与えられる．その意味におけるラグランジアン密度という言葉は第 6 章で出てくる．

*2) すべての正準変数に対して，交換関係 $[\ ,\ ]_-$ で量子化されるか，反交換関係 $[\ ,\ ]_+$ で量子化されるかの何れかが成り立つ可能性だけを考える．

*3) いまは，反エルミートな $M^{\mu\nu}$ を使っているので，普通の教科書のエルミートな場合に比べ，$M^{\mu\nu}$ の変換則の符号が逆であることに注意．

4) (3.29a) の右辺には，$im\overline{\xi}(x)$ を，(3.29b) の右辺には，$im\eta(x)$ を付け加えても，Lorentz 不変性は保たれる．ただし，$\overline{\xi} = \varpi\xi^*, \eta = \varpi\overline{\eta}^*$ である．

5) 次のような周知の事実を思い出そう．Weyl 表示 (2.36) を取れば，Dirac 方程式は連立方程式　$i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\eta} + m\xi = 0, i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi + m\bar{\eta} = 0$ になる．従って $(\Box - m^2)\xi = 0$. これから ξ を決めれば，上の第 2 式によって，$\bar{\eta}$ が決まる (その逆も可)．従って，ψ の複素成分は 4 (実数で数えると 8) であるが，そのうち独立なのは 2 (実数で数えると 4) だけである．これは，スピンのアップ・ダウンと，粒子・反粒子の自由度に対応する (つまり，正エネルギー解も負エネルギー解も正負のヘリシティを持つ)．同様に，Majorana スピノルは 4 つの実数の成分を持つが，独立なのは 2 つである．Majorana スピノルは (粒子 = 反粒子なので) スピン 1/2 の自由度しか記述しない．零質量の Dirac 方程式は Weyl 方程式 $i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\eta} = 0$ か $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi = 0$ に分離する．いずれも，独立な振幅は 2 (実数で数えて 4) であるが，前者は正エネルギー解は負の，負エネルギー解は正のヘリシティを持つのに対し，後者は正エネルギー解は正の，負エネルギー解は負のヘリシティを持つ．従って，各々 2 つの自由度しか記述しない．このように，スピノル場の方程式の記述する粒子の質量殻上の独立な自由度は，独立な実振幅の数の丁度半分になる．

6) 手元にある本の中で，スピンについての平易な解説で名著といわれる，
朝永振一郎,『スピンはめぐる』，中央公論社，(1974).
をまず挙げたい (第 2 章注 12) で引用した本)．また量子論の歴史については，
髙林武彦著,『量子論の歴史』，中央公論社，(1977).
が含蓄に富んだ好著である．専門書としては，どれを挙げたらよいか戸惑うくらい良書が多い．ここでは，少し旧いが，
S. S. Schweber, 第 2 章文献 16)
J. D. Bjorken, S. D. Drell, '*Relativistic Quantum Mechanics*', McGraw-Hill Book Company (1964)
C. Itzykson, J.-B. Zuber, '*Quantum Field Theory*', McGraw-Hill Book Company (1986)
のみを挙げておく．

7) もちろん，任意の表示で，(2.43) の $S(\Lambda) = \exp(-\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$ となることを使って

直接にも証明できる．

8) 表示の変更 $\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$ は $C'^{-1}\gamma'^\mu C' = -\gamma'^{\mu\,T} = S^{-1\,T}(-\gamma^{\mu\,T})S^T = (S^{-1\,T}C^{-1})\gamma^\mu(CS^T) = (S^{-1\,T}C^{-1}S^{-1})\gamma'^\mu(SCS^T)$ から $C' = SCS^T$ が言える．Weyl 表示から標準表示へ移るユニタリ行列は $S^{-1} = S^T$ を満たすが，Weyl 表示から Majorana 表示へ移るユニタリ行列は $S^{-1} \neq S^T$ となることに注意せよ．なお，荷電共役行列 C が反対称であることおよびユニタリに選べることは Pauli が第 2 章文献 16) §4 で証明している．それを簡単に述べると次のようになる．第 2 章 注 17) で選んだように γ^0 を反エルミートにすれば，γ^i $(i = 1, 2, 3)$ はエルミートになる．荷電共役行列 C の定義 (3.30b) のエルミート共役を取れば，$C^\dagger\gamma^{\mu\,\dagger}C^{-1\,\dagger} = \varepsilon_\mu C^\dagger\gamma^\mu C^{-1\,\dagger} = -\gamma^{\mu\,\dagger\,T} = -\varepsilon_\mu\gamma^{\mu\,T} = \varepsilon_\mu C^{-1}\gamma^\mu C$ となることがわかる．ただし，$\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ で，μ については和をとらない．従って，$CC^\dagger = a1_4$, $a > 0$ とかける．$C/\sqrt{a}$ を改めて C とかけば $CC^\dagger = 1_4$, すなわち C はユニタリに選べる．一方，C の反対称性 (3.30f) を証明するのに，Pauli は 4 次の行列は線形独立な対称行列が 10 個，線形独立な反対称行列が 6 個であることを利用した．まず，定義 (3.30b) から，$\gamma^\mu = \gamma^{\mu\,TT} = -C^T\gamma^{\mu\,T}C^{-1\,T} = (C^TC^{-1})\gamma^\mu(C^TC^{-1})^{-1} \to C^TC^{-1} = b^{-1}1_4$ が導かれる．従って，$C = bC^T \to b^2 = 1 \to b = \pm 1$ を得る．ゆえに，$CC^{T\,-1} = b1_4, b = \pm 1$．すると，$(C^{-1}\gamma^\mu)^T = \gamma^{\mu\,T}C^{T\,-1} = -(C^{-1}\gamma^\mu)CC^{T\,-1} = -bC^{-1}\gamma^\mu$, $\mu > \nu$ のとき，$(C^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu)^T = \gamma^{\nu\,T}\gamma^{\mu\,T}C^{T\,-1} = (C^{-1}\gamma^\nu\gamma^\mu)CC^{T\,-1} = -b(C^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu)$ が成り立つ．これらは線形独立で計 10 個あるから，必ず対称行列でなければならない．ゆえに，$b = -1$, すなわち，C は (3.30f) を満たさねばならない．このとき，$C^{-1}, C^{-1}\gamma_5, C^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$ $(\mu > \nu > \rho)$ は残りの線形独立な 6 つの反対称行列を与える．

9) Noether の定理は作用積分の不変性 $\delta \int d^4x\mathcal{L} = 0$ から導かれる．このとき，$\partial_\mu\delta x^\mu = 0$ なら，一般に $\delta\mathcal{L} =$ 全微分項 $\equiv \partial_\mu K^\mu$ となる．今の場合は $K^\mu = 0$ であるが $K^\mu \neq 0$ なら Noether 流の定義に K^μ が現れる．その具体例を第 6 章 6.3 節で見るであろう．なお，自由場の理論では存在しないが，古典的には保存する Noether 流が，量子論的補正により非保存になる例が知られており，それを**量子異常**という．大域的なカイラル対称性の場合に生ずる量子異常は有益・無害であるが，カイラルな局所的対称性に付随して生ずるカイラル量子異常は，理論の繰り込み可能性を壊すので，それが全体として相殺するようにモデルを設定せねばならないと考えられている．

10) 同一時空点での量子場は自由に (今の場合) 反交換できる正規則をとる約束をすれば，この変形はできる．

11) $\lambda_{1,2}$ を複素数とすれば，変換 $\psi \to \psi^c$ は複素共役を含むので，$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \to (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2)^c = \lambda_1^*\psi_1^c + \lambda_2^*\psi_2^c$ となる．ただし，量子場に行けば線形になる．

12) 時間反転のもとで，$\psi(x)$ がその複素共役に移行するのは，$\psi(x)$ がエネルギー E の固有状態 $\sim e^{-iEt}$ であれば，変換された状態もエネルギー E の固有状態 $\sim e^{-iEt'}$, $t' = -t$ であるという要請からである．

13) $\det(i\gamma\cdot p+m)=\det[\gamma_5^2(i\gamma\cdot p+m)]=\det[\gamma_5(i\gamma\cdot p+m)\gamma_5]=\det(-i\gamma\cdot p+m)=[\det(i\gamma\cdot p+m)(-i\gamma\cdot p+m)]^{1/2}=[\det(p^2+m^2)]^{1/2}=(p^2+m^2)^2$.

14) 注 *2) を参照．正準共役変数の間の交換関係は，π や $\pi^\dagger$ に余分の因子 1/2 が含まれるので，例えば，$[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi^\dagger_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\pm=(i/2)\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ のように右辺が因子 1/2 だけ違ってくる．

15) 多くの教科書では，$S^{\mu\nu}\to-2iS^{\mu\nu},M^{\mu\nu}\to-2iM^{\mu\nu}$ として，エルミートな量を使い，(3.83b) を $-(S^{\mu\nu}+l^{\mu\nu})\psi(x)=[M^{\mu\nu},\psi(x)]$ とかくのが習慣になっている．次章で，四元数と Lorentz 群との関係を調べると，自然に，反エルミートな $M^{\mu\nu}$ が出てくることがわかるので，前章 (2.57a)の $M^{\mu\nu}$ を利用した．なお，(3.83b) で $S^{\mu\nu}=0$ とすれば，スカラー場の変換則 (3.21b) が得られる．

16) 時間反転についての記法は教科書によって様々である．ここでは主として次の本を参考にした．

T. D. Lee, '*Particle Physics and Introduction to Field Theory*', Harwood Academic Publishers, (1981), 第 13 章.

J. J. Sakurai, '*Modern Quantum Mechanics*', Addison Wesley (1994), §4.4.

17) 時間反転の反ユニタリ性 $\langle\mathcal{T}\alpha|\mathcal{T}\beta\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle^*$ から，$\langle\alpha|\mathcal{T}^{-1}|\beta\rangle=\langle\alpha|\mathcal{T}^{-1}\beta\rangle=\langle\mathcal{T}\alpha|\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}\beta\rangle^*=\langle\beta|\mathcal{T}\alpha\rangle\longrightarrow\langle\mathcal{T}\alpha|\beta\rangle=\langle\alpha|\mathcal{T}^{-1}|\beta\rangle^*$ が成り立つ．従って，a を複素数として，$\langle\beta|a|\alpha\rangle=\langle\beta|\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}a|\alpha\rangle=\langle\mathcal{T}\beta|\mathcal{T}a|\alpha\rangle^*=\langle\mathcal{T}\beta|\mathcal{T}a\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\alpha\rangle^*=\langle\mathcal{T}\beta|\mathcal{T}a\mathcal{T}^{-1}|\mathcal{T}\alpha\rangle^*=a\langle\mathcal{T}\beta|\mathcal{T}\alpha\rangle^*=\langle\mathcal{T}\beta|a^*|\mathcal{T}\alpha\rangle^*$，すなわち，$\mathcal{T}$ の反線形性 $\mathcal{T}a\mathcal{T}^{-1}=a^*$ が示せる．公式 $\langle\mathcal{T}\alpha|\beta\rangle=\langle\alpha|\mathcal{T}^{-1}|\beta\rangle^*$ を使うと，$\langle\mathcal{T}\beta|\psi(x_T)|\mathcal{T}\alpha\rangle=\langle\beta|\mathcal{T}^{-1}\psi(x_T)\mathcal{T}|\alpha\rangle^*=\langle\beta|\psi'^\dagger(x_T)|\alpha\rangle^*$ から，$\mathcal{T}^{-1}\psi(x_T)\mathcal{T}=\psi'^\dagger(x_T)$，従って，(3.91d) が直ちに証明できる．さらに，線形演算子 A に対して，$\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1}$ も線形演算子ならば，$\langle\alpha|(\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1})^\dagger|\beta\rangle=\langle\beta|\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1}|\alpha\rangle^*=\langle\mathcal{T}^{-1}\beta|A|\mathcal{T}^{-1}\alpha\rangle=\langle\mathcal{T}^{-1}\alpha|A^\dagger|\mathcal{T}^{-1}\beta\rangle^*=\langle\alpha|\mathcal{T}A^\dagger\mathcal{T}^{-1}|\beta\rangle$ から，$(\mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1})^\dagger=\mathcal{T}A^\dagger\mathcal{T}^{-1}$ が成り立つことがわかる．この特殊な場合が (3.92d)，あるいはそれを導く (3.91e) の両式である．このようにして，テキストの (3.89a) から (3.92d) までの一連の式は，異なる記法を使っても正しく導ける．

18) この章では，S. S. Schweber の文献 6) のほか，次の本の入門的個所を参考にした．

九後汰一郎著,『ゲージ場の量子論 I,II』, 培風館 (1989).

大貫義郎著，岩波講座・現代の物理学,『場の量子論』，岩波書店 (1994).

S. Weinberg, 第 2 章文献 23).

これらの他にも，参考にした場の量子論・ゲージ理論の教科書は多数ある．

第 4 章

四元数と Lorentz 群

複素四元数を用いた Lorentz 群・Dirac 理論の再定式化は古くから議論されている (Lorentz 変換については F. Klein による示唆が 1911 年，Dirac 方程式に関しては Lanczos の仕事が 1929 年)．それに対して，4 次元時空の記述に，複素四元数ではなく実四元数を用いるべきだとの観点に立った，Lorentz 群の実四元数にもとづく最初の記述として，Dirac による，四元数分数変換による射影的方法がある (1945)．Dirac の射影的方法は，複素数の場合の拡張として，$SL(2,\mathbb{H})$ スピノルを定義する．この章では，まず，Dirac の射影的方法が 2 次の四元数行列による Lorentz 群の Dirac 表現に導くことを述べ，その詳細な説明は $SL(2,\mathbb{H})$ スピノル解析のあと行う．その後，四元数 Dirac 表現 (を $Spin(2,\mathbb{H})$ と記す) が固有 Lorentz 群のもとで可約でなければならないことから，$Spin(2,\mathbb{H})$ に属する四元数行列の対角化を通して，四元数と可換な新しい虚数単位が必要であることが示される．それを複素数の虚数単位に同定すれば，複素四元数によるスピノル解析を再現する．そして，$SL(2,\mathbb{C})$ Weyl スピノルの定義がそれに続く．これは，実四元数アプローチから伝統的な複素四元数アプローチの基本的関係式を理論的に導くというシナリオを実現しており，複素四元数を初めから道具として採用する立場と方法論的にも異なる．

4.1　2 次の四元数行列とその行列式

Lorentz 群と Dirac 理論を複素四元数ではなく四元数*[1]を用いて議論するためには，非可換な要素を持つ 2 行 2 列の四元数行列およびその行列式を考えねばならない．それで，まず，それらの性質についてやや詳しくまとめておこう．

いま，2 行 2 列の四元数行列の集合

$$M(2,\mathbb{H}) = \left\{ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a,b,c,d \in \mathbb{H} \right\} \tag{4.1a}$$

が，単位元を持つ環であるとする．つまり，和は成分毎の和，積は通常の行列の積とし，単位元，ゼロ元を次のように定義する．

$$(\text{単位元})\quad \mathbf{1}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad (\text{ゼロ元})\quad \mathbf{0}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列要素はすべて四元数なので，上式の 1 や 0 は $\mathbb{H}$ の単位元，ゼロ元である．四元数行列を取り扱う場合は，常にこのことを念頭に入れておく．

正則な 2 行 2 列の四元数行列の集合を

$$GL(2,\mathbb{H}) = \{\boldsymbol{A} \in M(2,\mathbb{H});\ \boldsymbol{A}\ \text{は正則}\ \}$$

とかく．$\boldsymbol{A}$ が正則ならば，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{1}_2$ を満たす逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する．$\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めるには，代数的解法の他に掃き出し法がある．いま分解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \tag{4.1b}$$

を考える．ここで，$x = bd^{-1}$, $y = (ac^{-1} - bd^{-1})^{-1}$,　$f = a - bd^{-1}c$,　$g = d$ とおいた．これら四元数の逆は存在すると仮定する．対角行列や三角行列の逆行列は容易に求まるので，逆行列の性質 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^{-1} = \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$ を使うと，上の分解から，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f^{-1} & -f^{-1}x \\ -g^{-1}y & g^{-1}yx + g^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a - bd^{-1}c)^{-1} & (c - db^{-1}a)^{-1} \\ (b - ac^{-1}d)^{-1} & (d - ca^{-1}b)^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1c}$$

となる．$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するためには，各要素の逆が存在する上に，条件 $a^{-1}b \neq c^{-1}d$ が必要である．(4.1b) の三角行列はすべて基本行列なので，上の方法は行基本操作による逆行列の求め方に他ならない．ところで，$D = |a - bd^{-1}c|^2|d|^2 \neq 0$ とおいて，

$$f^{-1} = \frac{1}{D}(|d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b}), \quad -f^{-1}x = \frac{1}{D}(|b|^2\bar{c} - \bar{a}b\bar{d})$$
$$-g^{-1}y = \frac{1}{D}(|c|^2\bar{b} - \bar{d}c\bar{a}), \quad g^{-1}yx + g^{-1} = \frac{1}{D}(|a|^2\bar{d} - \bar{b}a\bar{c})$$

が示せるから，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|a - bd^{-1}c|^2|d|^2}\begin{pmatrix} |d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} & |b|^2\bar{c} - \bar{a}b\bar{d} \\ |c|^2\bar{b} - \bar{d}c\bar{a} & |a|^2\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} \end{pmatrix} \tag{4.1d}$$

ともかける．

行列 $\boldsymbol{A}$ のトレース，エルミート共役は，行列のトレースを tr とかいて，

$$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}\;(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{Re}\,[\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\,] = \mathrm{Re}\,[\,a + d\,]$$
$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = \bar{\boldsymbol{A}}^{T} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

で定義される．四元数は非可換であるから，$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}\mathbf{B}) \neq \mathrm{tr}\,(\mathbf{B}\boldsymbol{A})$，$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^T \neq \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$ であるが，上のように定義されたトレース及びエルミート共役は $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{A}\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{B}\boldsymbol{A}), (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^{\dagger} = \boldsymbol{A}_2^{\dagger}\boldsymbol{A}_1^{\dagger}$ を満たす．条件 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\dagger}$ を満足するものをエルミート行列といい，正則なエルミート行列の集合を $H(2, \mathbb{H}) = \{\boldsymbol{A} \in GL(2, \mathbb{H});\ \boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}\}$ とかく．エルミート行列に対しては，$\mathrm{Tr}\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ である．

四元数行列式を定義するため[2)]，ある行の左移動を別の行に加えても行列式の値は変わらないという公理をおこう．このような行基本操作は基本行列を使って次のようにかける．

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xc & b + xd \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ya + c & yb + d \end{pmatrix}$$

ここで，x, y は任意の四元数とする．基本行列は正則である．行列式に対する組成法則 が成り立つとすれば，行基本操作を行っても行列式の値は変わらないという公理から，

$$\det\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix} = 1 \tag{4.1e}$$

が成り立つ．この式から

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \det\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ -a^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a^{-1}-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 1\end{aligned} \tag{4.1f}$$

が示せる．さらに，Artin [3]によれば，$h = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{H}^*$ とおいて，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ b^{-1}h^{-1}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -aba^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &\quad\begin{pmatrix}1 & 0\\ (a-1)(ab)^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & ab\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -(b^{-1}-1)a^{-1} & 1\end{pmatrix}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.1g}$$

が成り立つ．従って，組成法則と (4.1e) により，

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix} = 1, \quad h = aba^{-1}b^{-1}, \quad a, b \in \mathbb{H}^* \tag{4.1h}$$

となる．これで行列式を求める準備が整った．

明らかに

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ q^{-1}c & q^{-1}d\end{pmatrix} \tag{4.2a}$$

が成り立つ．ただし，q^{-1} の存在は仮定する．ここで，

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ q^{-1}c & q^{-1}d \end{pmatrix} = 1$$

となるように q を定める．すなわち，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ q^{-1}c & q^{-1}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^{-1}q & 0 \\ 0 & q^{-1}d \end{pmatrix}$$

$$q = d(a - bd^{-1}c), \quad x = bd^{-1}q, \quad y = q^{-1}cq^{-1}d$$

のようにするわけである．同様にして，次のような異なる分解を考える．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bq'^{-1} \\ c & dq'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & bq'^{-1} \\ c & dq'^{-1} \end{pmatrix} = 1 \to q' = (a - bd^{-1}c)d$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{-1}a & p^{-1}b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} p^{-1}a & p^{-1}b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \to p = a(d - ca^{-1}b)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap'^{-1} & b \\ cp'^{-1} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} ap'^{-1} & b \\ cp'^{-1} & d \end{pmatrix} = 1 \to p' = (d - ca^{-1}b)a$$

従って，

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad q = d(a - bd^{-1}c) \tag{4.2b}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix}, \quad q' = (a - bd^{-1}c)d \tag{4.2c}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = a(d - ca^{-1}b) \tag{4.2d}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p' = (d - ca^{-1}b)a \tag{4.2e}$$

を得る．$a \neq 0$ に対して，$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ だから，これら 4 つはすべて同じ行列式の値を与えねばならない．明らかに，可換体 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の行列式の場合は，$q = q' = p = p'$ なのでこの条件は自動的に満たされている．しかも，行列式の値をこれら一致した数に等しいとおけば，行列式は置換群で定義されるものと一致する．しかし，$\mathbb{H}$ は非可換体なので，すべての q, q', p, p' は一般に異なる．どのようにすれば，上の 4 つの行列式は同じ答えを与えるであろうか．しかも，$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ から，行列式の値は交換する．

まずエルミート行列の場合は，$a = \alpha \in \mathbb{R}, d = \beta \in \mathbb{R}, c = \bar{b} \in \mathbb{H}$ となっているので，すべての q, q', p, p' は一致する：$q = q' = p = p' = \alpha\beta - |b|^2$．これは置換群を用いた定義に導く．それを **Moore の行列式**（Mdet とかく）といい，

$$\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \bar{b} & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta - |b|^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{H} \tag{4.3}$$

で定義する．ここで，注意すべきは，エルミート行列の積は可換でない限りエルミートにはならないので，一般に Moore の行列式は組成法則を満足しない．しかし，(4.2) を導く過程はエルミート行列の場合にも成り立っている．それは，いま，q は実数であるから，エルミート行列に対する (4.2a) 右辺第 1 の行列はエルミート行列で，その Moore の行列式は q であるのに対し，右辺第 2 の行列は最早エルミートではないが，その Moore の行列式を置換群によって定義すれば[4)]，その値は左辺の Moore の行列式の q^{-1} 倍に等しいので，組成法則が成り立っていると考えてよい．それ故，Moore の行列式は (4.2) に基づいた別の

定義と無関係ではなくなる．

次に a, b, c, d に対してそれらの逆，および q, q', p, p' の逆が存在する以外は何らの制限を付けないで，(4.2) を導いた仮定に依存する定義を述べよう．(1.30) の組成法則から，$|q| = |q'|, |p| = |p'|$ が成り立つ．さらに，$|p| = |a(d - ca^{-1}b)| = |adb^{-1}(a - bd^{-1}c)a^{-1}b| = |q|$，同様に，$|p'| = |q'|$ も示せる．従って，

$$|q| = |q'| = |p| = |p'|$$

が成り立つ．それゆえ，

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = |q|^n, \quad q = d(a - bd^{-1}c) \tag{4.4a}$$

とおける (この場合，(4.1h) は自明)．ここで，n は任意の実数であるが，行列 $\boldsymbol{A}$ のある行を α 倍したとき (α は実数)，行列式の値は $|\alpha|$ 倍か $|\alpha|^2$ 倍になるかの何れかであることを要請すれば，$n = 1, 2$ の場合のみが許される．この要請は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |\alpha| \text{ または } |\alpha|^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.4b}$$

と同義である．

次に q' と q，および，p' と p の関係

$$q' = (a - bd^{-1}c)d = qh, \quad h = (a - bd^{-1}c)^{-1}d^{-1}(a - bd^{-1}c)d \tag{4.5a}$$

$$p' = (d - ca^{-1}b)a = h'p, \quad h' = (d - ca^{-1}b)a(d - ca^{-1}b)^{-1}a^{-1} \tag{4.5b}$$

に注目する．ここで，h や h' は $fgf^{-1}g^{-1}$，$f, g \in \mathbb{H}^*$ の形にかけているから，ゼロでない四元数の集合 $\mathbb{H}^*$ の交換子群 $[\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*]$ の要素である．$xh = (xhx^{-1}h^{-1})hx = h'x$，$h' \in [\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*]$ なので，交換子群は正規部分群 (不変部分群) である．そこで，剰余群 $\mathbb{H}^*/[\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*]$ の元を

$$[\,q\,] = \{qh; q \in \mathbb{H}^*, h \in [\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*]\}$$

によって定義しておく．すると，(4.5a,b) に依って，$[\,q\,] = [\,q'\,], [\,p\,] = [\,p'\,]$ が成り立つ．共役元が同じ剰余類に属すること，即ち，任意の $a, q \in \mathbb{H}^*$ に対して，$aqa^{-1} = q(q^{-1}aqa^{-1})$ により，$[\,aqa^{-1}\,] = [\,q\,]$ が成り立つことに注意すれば，上の関係は明らかであるが，さらに $p'(a^{-1}b^{-1}a) = (db^{-1}d^{-1})q$ から

$[\,p'(a^{-1}b^{-1}a)\,] = [\,p'\,][\,(a^{-1}b^{-1}a)\,] = [\,p'\,][\,b^{-1}\,]$, $[\,(db^{-1}d^{-1})q\,] = [\,b^{-1}\,][\,q\,]$ が示せる．ところが剰余群 $\mathbb{H}^*/[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*]$ はアーベル群だから[5)]，これは $[\,p'\,] = [\,q\,]$ に導く．結局

$$[\,q\,] = [\,q'\,] = [\,p\,] = [\,p'\,]$$

が成立する．依って，

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [\,q\,], \quad q = d(a - bd^{-1}c) \tag{4.6}$$

と定義することもできる．これを **Dieudonné の行列式**と呼ぶ．この定義によれば，(4.1h) は $[h] = 1$, $h = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{H}^*$ を意味する．$ab = \pm ba$ に応じて $h = \pm 1$ なので，$[\pm 1] = 1$ となるから，(4.1h) を $[\,h\,] = |h| = 1$ と解釈すると辻褄が合う．こうすれば，単位四元数は必ず $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{H}^*$ とかける (ことはすぐ後に証明する) から，$|q| = 1$ のとき，$[\,q\,] = 1$ となる．一般の四元数のときには，これは，$[q] \to |q|$ というおき換えを示唆する (つまり，(4.4a) の $n = 1$ のケース)．

このおき換えは次のように実行される．交換子群 $[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*]$ は単位四元数の集合に同型である．なぜなら，まず，交換子群の元は単位四元数であることは明らか．逆に，q が単位四元数のときは，ある単位四元数 a によって，必ず $q = xax^{-1}$, $x \in \mathbb{H}^*$ とかける．ここで，一般性を失うことなく，$a = b^2, b \in \mathbb{H}$ とかけば，すべての四元数は 2 つの純四元数の積で与えられるから，$b = uv, u, v \in \mathbb{H}_0$ とおける．$|a| = 1$ ゆえ，$|b| = 1$，従って，u, v は単位の純四元数と仮定できる．そのとき，$u^{-1} = -u, v^{-1} = -v$ だから，$q = xuvuvx^{-1} = xuv(-u)(-v)x^{-1} = (xux^{-1})(xvx^{-1})(xux^{-1})^{-1}(xvx^{-1})^{-1} \in [\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*]$ となる．即ち，単位四元数は交換子群 $[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*]$ に属する．その結果，同型写像

$$f([\,q\,]) = |q|, \quad [\,q\,] \in \mathbb{H}^*/[\mathbb{H}^*,\mathbb{H}^*], \quad q \in \mathbb{H}^* \tag{4.7}$$

が存在する．この同型写像を用いて定義される四元数行列式

$$\mathrm{Ddet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = |q|, \quad q = d(a - bd^{-1}c) \tag{4.8}$$

を**規格化された Dieudonné の行列式**という．一方，**Study の行列式**と呼ば

れる四元数行列式

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & -\overline{A}_2 \\ A_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \text{ など} \tag{4.9a}$$

も定義されている．ここで，$A_{1,2}$ は a のシンプレクティック成分などで，右辺の det は普通の複素行列に対する行列式である (虚数単位は e_3)．四元数行列式を普通の複素行列に対する行列式で定義するにもかかわらず，Study の行列式は，(4.2b) において，$q = d(a - bd^{-1}c) = \mathcal{Q}_1 + e_2\mathcal{Q}_2$ というシンプレクティック表示 (1.36) を使って，

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_1 & -\overline{\mathcal{Q}}_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_2 & \overline{\mathcal{Q}}_1 \end{pmatrix}$$
$$= |\mathcal{Q}_1|^2 + |\mathcal{Q}_2|^2 = |q|^2 \tag{4.9b}$$

のように (4.4a) の $n = 2$ の場合に相当することがわかる (右辺の det は虚数単位が e_3 の普通の複素行列に対する行列式である)．実際，4 次の行列式 (4.9a) を Laplace の展開定理を用いて直接計算すれば，(4.9b) に等しくなることが示せる．(4.9a) と (4.9b) の等価性を知れば，Study の行列式は，組成法則を使って，恒等式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

から

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= |a - bd^{-1}c|^2|d|^2 = |q|^2$$

と導いてもよい．ここで，

$$\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |A_1|^2 + |A_2|^2 = |a|^2
$$

$$
\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = |D_1|^2 + |D_2|^2 = |d|^2
$$

を使った．

このように四元数の行列式は一般に一意的な定義ができない．エルミート行列に対しては，

$$
\mathrm{Ddet}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \bar{b} & \beta \end{pmatrix} = \left|\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \bar{b} & \beta \end{pmatrix}\right| \tag{4.10a}
$$

$$
\mathrm{Sdet}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \bar{b} & \beta \end{pmatrix} = \left|\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \bar{b} & \beta \end{pmatrix}\right|^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{H} \tag{4.10b}
$$

が成り立つ．明らかに

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix}
$$

はエルミートなので，その Moore の行列式は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mdet}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger) &= (a\bar{a} + b\bar{b})(c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{c} + b\bar{d})(c\bar{a} + d\bar{b}) \\
&= (|a|^2 - |b|^2)(|d|^2 - |c|^2) + |a\bar{c} - b\bar{d}|^2 \\
&= |a - bd^{-1}c|^2|d|^2 = \mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A}
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

となり，Study の行列式に等しい[6]．既に述べたように，Moore の行列式は一般には組成法則を満足しないが，次の関係式を満たす[7]．

$$
\mathrm{Mdet}\,(\boldsymbol{A}\mathcal{X}\boldsymbol{A}^\dagger) = \mathrm{Mdet}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger) \times \mathrm{Mdet}(\mathcal{X})
$$

$$
\boldsymbol{A} \in GL(2, \mathbb{H}), \qquad \mathcal{X} \in H(2, \mathbb{H}) \tag{4.12a}
$$

なぜなら，(4.10b) により，

$$\left|\mathrm{Mdet}\,(\boldsymbol{A}\mathcal{X}\boldsymbol{A}^\dagger)\right|^2 = \mathrm{Sdet}\,(\boldsymbol{A}\mathcal{X}\boldsymbol{A}^\dagger) = (\mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A})(\mathrm{Sdet}\,\mathcal{X})(\mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A}^\dagger)$$
$$= (\mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)(\mathrm{Sdet}\,\mathcal{X}) = (\mathrm{Mdet}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^2(\mathrm{Mdet}\,\mathcal{X})^2 \tag{4.12b}$$

が成り立つ．ここで，Sdet の組成法則を使った．この式の平方根を取ったときの符号の任意性は $\mathcal{X} = \mathbf{1}_2$ とおいて，+ サインに決まるから，(4.12a) を得る．

以上の準備のもとに $SL(2,\mathbb{H})$ をユニモデュラリティの条件から次のように定義できる．

$$SL(2,\mathbb{H}) = \left\{\boldsymbol{A} \in GL(2,\mathbb{H});\ \det \boldsymbol{A} = 1\right\}$$

ここで，det = Det，Sdet または Ddet である．Mdet を用いる場合は，$\mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{Mdet}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)$ に注意する．Det の定義 (4.6) の下で既に述べたように，$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ は，$q = d(a - bd^{-1}c)$ が，単位四元数であることを要求するから，$SL(2,\mathbb{H})$ は 1 つの条件，$|d(a - bd^{-1}c)| = 1$ だけで指定される．それ故，以下で用いる $SL(2,\mathbb{H})$ の定義にはどの行列式を用いてもよいことになる．

4.2 Dirac の射影的方法と Lorentz 群

数学における四元数の特殊な性質は，第 1 章で詳述したように，四元数が可除性の公理を満たす最も一般な数 (つまり体) であるという点にある．複素四元数はこのような性質を持っていないので，他の超複素数の体系と何ら差異はない．にもかかわらず，複素四元数を用いて Lorentz 群を議論する方法は，その歴然とした記号的意味も含めて極めて自然に見えた．そのため，却って，相対論における四元数の位置づけを不当に低く見積もる結果を生んだのではないかとさえ思える．例えば，複素四元数は Pauli 行列と同じであるから，何も四元数を持ち出す必要はない，$SL(2,\mathbb{C})$ スピノル解析があるではないかと言われる．このような意見はもっともであり，現在に至るも大勢を占めている．

しかしながら，とにかく四元数によって Lorentz 群を議論するなら，複素四元数ではなく (実) 四元数を用いるべきであると最初に指摘したのは，Dirac その人であることを知る人は少ない．その論文 (1945)[8)]から引用すると，

「(複素四元数ではなく) 普通の四元数を用い，それを Lorentz 群に等価な変換群に従わせることにより，物理的世界と四元数を結びつける方が，より有益な研究の道であるように見える」

Dirac の考えた射影的方法は次のような変換に基づく．任意の四元数 q を

$$q = \zeta^1(\zeta^2)^{-1}, \quad q, \zeta^1, \zeta^2 \in \mathbb{H} \tag{4.13a}$$

とかく．ただし，$\zeta^2 \neq 0$．比 $\zeta^1(\zeta^2)^{-1}$ は，変換

$$\zeta^1 \to \zeta^1\lambda, \quad \zeta^2 \to \zeta^2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{H}^* \tag{4.13b}$$

のもとで不変であるから，次の同値関係を与える．

$$\zeta^1 \sim \zeta^1\lambda, \quad \zeta^2 \sim \zeta^2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{H}^*$$

いま，a, b, c, d を四元数として，線形変換

$$\begin{cases} \zeta^{1\prime} = a\zeta^1 + b\zeta^2 \\ \zeta^{2\prime} = c\zeta^1 + d\zeta^2 \end{cases} \tag{4.13c}$$

を考える．すると，

$$q \to q' = (a\zeta^1 + b\zeta^2)(c\zeta^1 + d\zeta^2)^{-1} = (aq + b)(cq + d)^{-1} \tag{4.13d}$$

となる．これは複素数の分数変換 [9]の一般化である．上式はまた，

$$q' = a(q + a^{-1}b)(q + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}$$

ともかけるから，$q' =$ 一定とならないためには，$a^{-1}b \neq c^{-1}d$ でなければならない．いま，(4.13c) を，

$$\left(\zeta^{1\prime}(\zeta^{2\prime})^{-1}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\zeta^1(\zeta^2)^{-1}\right), \quad a^{-1}b \neq c^{-1}d \tag{4.13e}$$

とかく．ここに現れる行列は $GL(2, \mathbb{H})$ に属す．それ故，変換 (4.13c), (4.13d) は群をなす．

いま，

$$\begin{cases} Q_1 = \zeta^1\overline{\zeta^2} = X^4 - X^1e_1 - X^2e_2 - X^3e_3 \\ Q_2 = \zeta^1\overline{\zeta^1} = -X^0 + X^5 \qquad\qquad X^I \in \mathbb{R},\ (I = 0, 1, \cdots, 5) \\ Q_3 = \zeta^2\overline{\zeta^2} = -X^0 - X^5 \end{cases} \tag{4.14a}$$

とおくと，変換 $q \to q'$ は $X^I(I=0,1,\cdots,5)$ の間の，a,b,c,d から決まる実係数の線形な斉次変換を引き起こす．ところが，条件

$$|Q_1|^2 = Q_2 Q_3 \tag{4.14b}$$

により，$X^I(I=0,1,\cdots,5)$ の間には，

$$(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2+(X^4)^2=(X^0)^2-(X^5)^2 \tag{4.14c}$$

という関係が，変換前後において成り立つ．その上，(4.13b) のもとで，$Q_i \to Q_i(\lambda\bar{\lambda})$ だから，X^I は比しか決まらない．従って，6 個の座標 $X^I(I=0,1,\cdots,5)$ を 5 次元射影空間における斉次座標とみなすことができ，変換 $q \to q'$ は 5 次元空間の 2 次超曲面 (4.14c) を不変に保つ射影変換である．

この射影変換は 15 個のパラメータを持つ[10]ので，Lorentz 群よりも広い．それ故，X^4 と X^5 は不変である

$$X^{4\prime}=X^4, \quad X^{5\prime}=X^5 \tag{4.15a}$$

という制約をつける．即ち，

$$\begin{cases} \zeta^{1\prime}\overline{\zeta^{2\prime}}+\zeta^{2\prime}\overline{\zeta^{1\prime}}=\zeta^1\overline{\zeta^2}+\zeta^2\overline{\zeta^1} \\ \zeta^{1\prime}\bar{\zeta}^{1\prime}-\zeta^{2\prime}\overline{\zeta^{2\prime}}=\zeta^1\bar{\zeta}^1-\zeta^2\overline{\zeta^2} \end{cases} \tag{4.15b}$$

を要請する．これらの式の左辺を計算して，a,b,c,d に対する制限を求めると，

$$\begin{cases} a\bar{c}+c\bar{a}=b\bar{d}+d\bar{b}=0 \\ \bar{d}a+\bar{b}c=\bar{a}d+\bar{c}b=1 \\ \bar{b}a-\bar{d}c=\bar{a}b-\bar{c}d=0 \\ a\bar{a}-c\bar{c}=d\bar{d}-b\bar{b}=1 \end{cases} \tag{4.15c}$$

となることがわかる．この方程式系の解は容易に見つけられて，

$$\begin{cases} \mu=-ca^{-1}=bd^{-1}\in\mathbb{H}_0, \\ 1=|a|^2(1+\mu^2)=|d|^2(1+\mu^2), \quad 1+\mu^2\neq 0 \\ d=a \end{cases} \tag{4.15d}$$

を得る[11]．このようにして，Lorentz 変換が

$$q \to q'=(aq+\mu a)(-\mu aq+a)^{-1}=(q^a+\mu)(-\mu q^a+1)^{-1}$$

$$\mu \in \mathbb{H}_0, \quad q^a = aqa^{-1} \tag{4.15e}$$

とかけることがわかった．これを (4.13e) 流にかけば，

$$\left(\zeta^{1\prime}(\zeta^{2\prime})^{-1}\right) = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} \left(\zeta^1(\zeta^2)^{-1}\right) \tag{4.16a}$$

となる．ただし，$a = d = Q, b = -c = -P$ とおいた．すると，次の条件を得る．

$$\begin{cases} \bar{P}Q + \bar{Q}P = 0 \\ |Q|^2 - |P|^2 = 1 \end{cases} \tag{4.16b}$$

この条件によって，(4.2a)に現れる q に対して，

$$q = Q(Q + PQ^{-1}P) = \frac{Q}{|Q|^2}(|Q|^2 Q + P\bar{Q}P) = \frac{Q^2}{|Q|^2} \to |q| = 1 \tag{4.16c}$$

が得られるから，

$$\det \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = 1 \tag{4.16d}$$

となる．

4.4 節で示すように，条件 (4.16b) に従う (4.16a) の変換行列の集合は群をなし，固有 Lorentz 群の普遍被覆群であることがわかる．ゆえに，この段階で，固有 Lorentz 群の四元数によるスピノル表現が求まったことになる．次の課題は，四元数スピノルを直接取り扱うことにある．

4.3　$SL(2, \mathbb{H})$ スピノル解析

Dirac による四元数の分数変換から，スピノルを定義するために，複素数の場合を一般化して，

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \tag{4.17a}$$

を $\mathbb{H}^2$ のベクトルとみなす．そうすれば，

$$\boldsymbol{\Psi}' = \begin{pmatrix} \zeta^{1\prime} \\ \zeta^{2\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{1} \\ \zeta^{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{H}) \tag{4.17b}$$

によって，$SL(2,\mathbb{H})$ スピノル $\boldsymbol{\Psi}$ を定義できる[12)]．これは，$SL(2,\mathbb{C})$ スピノル (2.25) の一般化である．

実数体も含めれば，一般に，$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ として，$SL(2,K)$ スピノルを定義できる．そして，

$$SL(2,\mathbb{R}) \cong \overline{SO}(2,1) \tag{4.18a}$$

$$SL(2,\mathbb{C}) \cong \overline{SO}(3,1) \tag{4.18b}$$

$$SL(2,\mathbb{H}) \cong \overline{SO}(5,1) \tag{4.18c}$$

という同型が成り立つことが知られている．これらの式の右辺に現れる群は，それぞれ，ユークリッド空間 $\mathbb{R}, \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ における共形群[13)]の普遍被覆群である．有名な (4.18b) は 2.2 節で証明した．この節では，これも既知の (4.18c) を証明するが，目的はあくまで次節の $Spin(2,\mathbb{H})$ の定義を天降り的ではない方法で行いたいことにある．

任意のエルミート行列 $\mathcal{X} \in H(2,\mathbb{H})$ は 6 つの一般化された Pauli 行列 Γ_I $(I = 0, 1, \cdots, 5)$ により実係数をもつ線形結合で表される．

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= X^0\Gamma_0 + X^1\Gamma_1 + X^2\Gamma_2 + X^3\Gamma_3 + X^4\Gamma_4 + X^5\Gamma_5 \\ &\equiv X^I\Gamma_I, \quad (I = 0, 1, \cdots, 5) \end{aligned} \tag{4.19a}$$

ただし，$X^I \in \mathbb{R}$ $(I = 0, 1, \cdots, 5)$ である．ここで，一般化された Pauli 行列を次のように定義した．

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -e_i \\ e_i & 0 \end{pmatrix} \ (i = 1, 2, 3),$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.19b}$$

便宜上，単位行列を $-\Gamma_0 \equiv \mathbf{1}_2$ とし，Pauli 行列 σ_2 に現れる i を Hamilton の虚数単位 e_1, e_2, e_3 におき換えたものを $\Gamma_{1,2,3}$ とした．さらに，$\Gamma_4 = \sigma_1, \Gamma_5 = \sigma_3$ も Pauli 行列である．それ故，一般化というのは，$\sigma_2 \to \Gamma_{1,2,3}$ に他ならな

い[14]．(4.19a) は前節の (4.14a) をエルミート行列

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix}Q_2 & Q_1\\ \overline{Q}_1 & Q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-X^0+X^5 & X^4-X^ie_i\\ X^4+X^ie_i & -X^0-X^5\end{pmatrix}\in H(2,\mathbb{H}) \tag{4.20}$$

に組んだものに他ならない．ただし，最早，Q_i を $\zeta^{1,2},\overline{\zeta^{1,2}}$ では表さないので，(4.14b) の関係は成り立たない．(4.20) の四元数行列式は

$$\det\mathcal{X}=\begin{cases}|-X^2|, & \det=\mathrm{Ddet}\\ |-X^2|^2, & \det=\mathrm{Sdet}\\ -X^2, & \det=\mathrm{Mdet}\end{cases}$$

$$X^2=-(X^0)^2+(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2+(X^4)^2+(X^5)^2\equiv\eta_{IJ}X^IX^J,$$

$$(\eta_{IJ})=\mathrm{diag}\,(-1,+1,+1,+1,+1,+1). \tag{4.21}$$

で与えられる．つまり，$X=(X^0,X^1,\cdots,X^5)$ は不定計量 (η_{IJ}) をもつ $D=6=5+1$ 次元時空における世界点の座標と見なせ，X^2 を不変に保つ変換

$$X'^I=\Lambda^I{}_JX^J,\quad \eta_{IJ}\Lambda^I{}_K\Lambda^J{}_L=\eta_{KL}. \tag{4.22}$$

は群 $O(5,1)$ をなすことは，Lorentz 群 $O(3,1)$ の場合と同じである．それ故，$\mathcal{X}$ のエルミート性およびその行列式の値を変えない変換

$$\mathcal{X}\to\mathcal{X}'=\boldsymbol{A}\mathcal{X}\boldsymbol{A}^\dagger,\quad \boldsymbol{A}\in SL(2,\mathbb{H}), \tag{4.23}$$

は $\mathbb{R}^4$ における共形群である $SO(5,1)$ の普遍被覆群を定義する[15]．その証明は第 2.2 節で行った (4.18b) のそれと本質的に同じであるが，四元数の計算規則の説明にもなるので，ここで，改めて紹介する．

(4.23) に (4.22) を代入して，(2.21a) を一般化した式

$$\Lambda^I{}_J\Gamma_I=\boldsymbol{A}\Gamma_J\boldsymbol{A}^\dagger,\quad \Gamma_I=\eta_{IJ}\Gamma^J,\quad \boldsymbol{A}\in SL(2,\mathbb{H}) \tag{4.24}$$

を得るので，$\Lambda^I{}_J=\Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{A}$ の連続関数となる．

行列 $\mathcal{X}$ の逆行列は $X^2\neq0$ のとき存在して，

$$\mathcal{X}^{-1}=\frac{1}{-X^2}\tilde{\mathcal{X}},\quad \tilde{\mathcal{X}}\equiv X^I\tilde{\Gamma}_I, \tag{4.25a}$$

$$\tilde{\Gamma}_0=\Gamma_0,\quad \tilde{\Gamma}_I=-\Gamma_I\quad (I=1,2,\cdots,5) \tag{4.25b}$$

となる．不変性 $X^2 = X'^2$ を使えば，

$$\mathcal{X}'^{-1} = \boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\mathcal{X}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{A} \in SL(2,\mathbb{H}), \tag{4.26a}$$

$$\Lambda^I{}_J\tilde{\Gamma}_I = \boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_J\boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{A} \in SL(2,\mathbb{H}). \tag{4.26b}$$

この式は $X^2 = X'^2 = 0$ のときにも成り立つ[16)]．行列の組 $\{\Gamma_I, \tilde{\Gamma}_I\}_{I=0,1,\cdots,5}$ は次の関係式を満たす．

$$\Gamma_I\tilde{\Gamma}_J + \Gamma_J\tilde{\Gamma}_I = -2\eta_{IJ}\mathbf{1}_2, \quad \tilde{\Gamma}_I\Gamma_J + \tilde{\Gamma}_J\Gamma_I = -2\eta_{IJ}\mathbf{1}_2 \tag{4.27}$$

この第 1 式の左から $\boldsymbol{A}$ を掛け，右から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を掛けて，(4.24) と (4.26b) を使えば，$\eta_{IJ}\Lambda^I{}_K\Lambda^J{}_L = \eta_{KL} \to X'^2 = X^2$ が導けて，$(\Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A})) \in O(5,1)$ が言える．

そこで，第 2.2 節に習って，次の事実を順番に証明する (証明はごく簡単に済ます)．

$$\Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A}_1)\Lambda^J{}_K(\boldsymbol{A}_2) = \Lambda^I{}_K(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) \tag{4.28a}$$

$$\det(\Lambda^I{}_J) = 1 \tag{4.28b}$$

$$\Lambda^0{}_0 \geqq 1 \tag{4.28c}$$

$$\Lambda^I{}_J(-\boldsymbol{A}) = \Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A}) \tag{4.28d}$$

(4.28a,d) は自明である ((4.23)を満たす 2 つの行列は符号を除いて一致する)．(4.27) から得られる $\mathrm{Tr}\,[\Gamma_I\tilde{\Gamma}_J] = -2\eta_{IJ}$ を使うと，行列要素 $\Lambda^I{}_J$ を行列 $\boldsymbol{A}$ によって表す，(2.21e) と類似の式

$$\Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{A}\Gamma_J\boldsymbol{A}^\dagger\tilde{\Gamma}^I] = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_J\boldsymbol{A}^{-1}\Gamma^I] \tag{4.29}$$

が (4.24)，(4.26b) から導ける．まず，$\Lambda^0{}_0 = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger] = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\boldsymbol{A}^{-1}] > 0$, それ故，$\eta_{IJ}\Lambda^J{}_0\Lambda^J{}_0 = -1$ から，$\Lambda^0{}_0 \geqq 1$ となる．これで (4.28c) が証明された．次に，$\Lambda^I{}_J = \Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{A}$ の連続関数なので，$\det\Lambda^I{}_J(\boldsymbol{A}) = \det\Lambda^I{}_J(\mathbf{1}_2) = \det(\eta^I{}_J) = 1$ となり $\det(\Lambda^I{}_J) = 1$ が得られる[17)]．これが (4.28b)．結局 (4.18c) が証明された．

ところで，$SL(2,\mathbb{C})$ の無限小生成演算子を求める上で，公式 $\sigma_\mu A\bar{\sigma}^\mu =$

$-2(\mathrm{tr}\,A)1_2$ が重要であった (第 2.2 節 (2.27) 上参照). それに対し, (4.1a) の四元数行列 $\boldsymbol{A}$ に対しては,

$$\Gamma_J \boldsymbol{A}^\dagger \tilde{\Gamma}^J = \begin{pmatrix} -2(d+\bar{d}) - 2\bar{a} & 2b \\ 2c & -2(a+\bar{a}) - 2\bar{d} \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

となるので, (4.24) から得られる式

$$\Lambda^I{}_J \Gamma_I \tilde{\Gamma}^J = \boldsymbol{A}(\Gamma_J \boldsymbol{A}^\dagger \tilde{\Gamma}^J)$$

によって $\boldsymbol{A}$ を直接左辺に比例するようにはかけない. にもかかわらず, $SL(2,\mathbb{H})$ の無限小生成演算子は次のようにして見つけることができる. いま, 無限小変換, $\Lambda^I{}_J = \delta^I{}_J + \omega^I{}_J$ に対して,

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{1}_2 + \boldsymbol{\Sigma} \tag{4.31a}$$

とおく. 但し, $\mathrm{Tr}\boldsymbol{\Sigma} = 0$. $\Gamma_I \tilde{\Gamma}^I = -6\mathbf{1}_2$ なので, $\boldsymbol{\Sigma}$ は

$$-6\mathbf{1}_2 + \omega^I{}_J \Gamma_I \tilde{\Gamma}^J = (\mathbf{1}_2 + \boldsymbol{\Sigma})(-6\mathbf{1}_2 + (\Gamma_J \boldsymbol{\Sigma}^\dagger \tilde{\Gamma}^J) = -6\mathbf{1}_2 - 6\boldsymbol{\Sigma} + \Gamma_J \boldsymbol{\Sigma}^\dagger \tilde{\Gamma}^J$$

$$\text{則ち}\,\omega^I{}_J \Gamma_I \tilde{\Gamma}^J = -6\boldsymbol{\Sigma} + \Gamma_J \boldsymbol{\Sigma}^\dagger \tilde{\Gamma}^J$$

を満たす.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\Gamma_J \boldsymbol{\Sigma}^\dagger \tilde{\Gamma}^J = \begin{pmatrix} -2(\delta+\bar{\delta}) - 2\bar{\alpha} & 2\beta \\ 2\gamma & -2(\alpha+\bar{\alpha}) - 2\bar{\delta} \end{pmatrix}$$

だから,

$$\omega^I{}_J \Gamma_I \tilde{\Gamma}^J = -4\boldsymbol{\Sigma} - 4(\mathrm{Re}\,\alpha + \mathrm{Re}\,\delta)1_2 = -4\boldsymbol{\Sigma} \tag{4.31b}$$

を得る. ゆえに,

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\frac{1}{4}\omega_{IJ}\Gamma^I \tilde{\Gamma}^J = -\frac{1}{4}\omega_{IJ}\Sigma^{IJ}, \quad \Sigma^{IJ} = \frac{1}{2}(\Gamma^I \tilde{\Gamma}^J - \Gamma^J \tilde{\Gamma}^I) \tag{4.31c}$$

を得るが, その交換関係は

$$[\Sigma^{IJ}, \Sigma^{KL}] = 2[\eta^{IK}\Sigma^{JL} - \eta^{IL}\Sigma^{JK} - \eta^{JK}\Sigma^{IL} + \eta^{JL}\Sigma^{IK}] \tag{4.31d}$$

となる．これは，(2.28a) の $M^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}$ が満たす交換関係 (2.15d) の一般化である．

4.4 四元数と Lorentz 群

$SL(2,\mathbb{H})$ は Lorentz 群より広いので，第 4.2 節で述べたように，(4.15a) の制約を行い，固有 Lorentz 群に同型な $SL(2,\mathbb{H})$ の部分群を探すことにする．前節で行ったスピノル解析による 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ における共形群 $SO(5,1)$ のスピノル群が $SL(2,\mathbb{H})$ であることの証明は，Lorentz 群のスピノル群として，$SL(2,\mathbb{H})$ の部分群が考えられることを示唆している．しかし，2 次元スピノル表現は複素表現で，$SL(2,\mathbb{C})/Z_2 \cong L_+^\uparrow$ を通してしか得られない．だから，$SL(2,\mathbb{H})$ の適当な部分群を探しても，Lorentz 群の 2 次元スピノル表現が得られないのでは意味がない．次節で，その部分群に属する四元数行列の対角化を通して，四元数から複素四元数に移行することにより, 2 次元スピノル表現を得る方法を説明する．

さて，(4.15a) の制限は，前節で出てきた $SO(5,1)$ の線形変換の行列要素を次のように選ぶことに相当する．

$$(\Lambda^I{}_J) = \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & (\Lambda^\mu{}_\nu) & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

行列 $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$ は Lorentz 群の単位元の連結成分（固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$）に属す．即ち，$\Lambda^0{}_0 \geqq 1$, $\det\Lambda = 1$. 対応する $SL(2,\mathbb{H})$ の要素は次の拘束条件に従う．

$$\boldsymbol{A}\sigma_1\boldsymbol{A}^\dagger = \sigma_1, \quad \boldsymbol{A}\sigma_3\boldsymbol{A}^\dagger = \sigma_3. \tag{4.33}$$

いま，(2.21b) の行列 ϖ を四元数行列と考えて同じ記号をつかえば，$\sigma_1 = \varpi\sigma_3$

なので，第 1 式から，$\boldsymbol{A}\varpi\sigma_3\boldsymbol{A}^\dagger = \varpi\sigma_3$ を得るが，これを第 2 式に代入して $\boldsymbol{A}\varpi\boldsymbol{A}^{-1} = \varpi$ が得られる．これは，$\boldsymbol{A}$ が ϖ と交換することを意味し，$Q, P \in \mathbb{H}$ を用いて，$\boldsymbol{A} = Q\boldsymbol{1}_2 + P\varpi$ とかける．この $\boldsymbol{A}$ に対しては，$\boldsymbol{A}(\sigma_{1,3}\boldsymbol{A}^\dagger) = \boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{A}}\sigma_{1,3}) = \sigma_{1,3}$ となるので，$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{1}_2 = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ が結果し，それ故，$|Q|^2 - |P|^2 = 1$ 及び $\mathrm{Re}\,[Q\bar{P}] = 0$ でなければならない．以上まとめると，(4.33) を満足する行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} \equiv \mathsf{A}, \quad \mathsf{A}^{-1} = \bar{\mathsf{A}}, \quad \begin{cases} |Q|^2 - |P|^2 = 1 \\ \mathrm{Re}\,[\bar{Q}P] = 0, \ Q, P \in \mathbb{H} \end{cases} \tag{4.34}$$

となり，(4.16c,d) により，$\det \mathsf{A} = 1$. 行列 A の集合が $SL(2,\mathbb{H})$ の部分群をなすことは，$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$ を (4.34) で与えられる行列とすれば，

$$\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2^{-1} = \mathsf{A}_1\bar{\mathsf{A}}_2 = \begin{pmatrix} Q_1 & -P_1 \\ P_1 & Q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{Q}_2 & -\bar{P}_2 \\ \bar{P}_2 & \bar{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_3 & -P_3 \\ P_3 & Q_3 \end{pmatrix}$$

がまた (4.34) の形をすることからわかる．実際，$(Q_i, P_i)_{i=1,2}$ が (4.34) の 2 つの条件式を満足するならば，$(Q_3 = Q_1\bar{Q}_2 - P_1\bar{P}_2, P_3 = Q_1\bar{P}_2 + P_1\bar{Q}_2)$ もまた (4.34) の 2 つの条件式を満足する．それ故，(4.34) の行列 A の集合は $SL(2,\mathbb{H})$ の部分群をなす．その部分群を仮に**四元数スピノル群**と呼ぶことにし，以降，$Spin(2,\mathbb{H})$ とかく．

$$Spin(2,\mathbb{H}) = \left\{\mathsf{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{H}); |Q|^2 - |P|^2 = 1, \ \bar{P}Q + \bar{Q}P = 0\right\} \tag{4.35}$$

以下で，$Spin(2,\mathbb{H})$ が $\overline{SO}(3,1)$ に同型であることを証明する．則ち，$\Lambda \in L_+^\uparrow \to \mathsf{A}(\Lambda) \in Spin(2,\mathbb{H})$ は固有 Lorentz 群の (2 価) 表現である[18)]．なお，行列 $\mathsf{A} \in Spin(2,\mathbb{H})$ はいくつかの面白い性質をもつ．それについては，付録 B にまとめる．以下で A とかけば，常に $Spin(2,\mathbb{H})$ の元を意味する．

条件 (4.15a) より，(4.23) において，$X^4 = X^5 = 0$ とおける．そこで，さらに，4 次元時空の座標を用いて，$X^\mu = x^\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ とおけば，(4.19a) は

$$\mathsf{X} = x^0\Gamma_0 + x^1\Gamma_1 + x^2\Gamma_2 + x^3\Gamma_3 \equiv x^\mu\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} -x^0 & -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x} & -x^0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

になる．この式は，Pauli 行列を用いて時空座標を 2×2 行列で表した (2.19) と比較すべきものである．(2.19)(の $-i$ 倍) は虚時間座標を用いる複素四元数による時空座標の表示に他ならない．(4.36) では $4=1+3$ が四元数の基底に結びついているとより明白に主張できる．次節で，行列 A の固有値問題から，四元数と可換な新しい虚数単位が必要であることが示されるであろう．実際，(2.19) は (4.36) から自然な方法で導かれる．

変換 (4.23) は (4.36) に対して，

$$\mathsf{X}\to\mathsf{X}'=\mathsf{A}\mathsf{X}\mathsf{A}^\dagger,\quad x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,\quad \mathsf{A}\in Spin(2,\mathbb{H}) \tag{4.37}$$

とかける．式 (4.24)，(4.26b) はそれぞれ，

$$\Lambda^\mu{}_\nu\Gamma_\mu=\mathsf{A}\Gamma_\nu\mathsf{A}^\dagger, \tag{4.38a}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu\tilde{\Gamma}_\mu=\mathsf{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_\nu\mathsf{A}^{-1} \tag{4.38b}$$

となる (第 2 式は第 1 式の両側から σ_1 か σ_3 を掛けてえられる)．行列の組 $\{\Gamma_\mu,\tilde{\Gamma}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ は (4.27) で添え字を $I=\mu, J=\nu$ に制限した次の関係式を満たす．

$$\Gamma_\mu\tilde{\Gamma}_\nu+\Gamma_\nu\tilde{\Gamma}_\mu=-2\eta_{\mu\nu}\mathbf{1}_2,\quad \tilde{\Gamma}_\mu\Gamma_\nu+\tilde{\Gamma}_\nu\Gamma_\mu=-2\eta_{\mu\nu}\mathbf{1}_2, \tag{4.39}$$

ここで言うまでもなく，定計量は $\eta=(\eta_{\mu\nu})=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$ である．また，(4.29) は

$$\Lambda^\mu{}_\nu=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\mathsf{A}\Gamma_\nu\mathsf{A}^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu]=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[\mathsf{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_\nu\mathsf{A}^{-1}\Gamma^\mu] \tag{4.40}$$

となる．すでに $\Lambda^0{}_0\geqq 1, \det\Lambda=1$ は既知．$\Lambda(\mathsf{A})=\Lambda(-\mathsf{A}), \Lambda^i{}_j(\mathsf{A}_1)\Lambda^j{}_k(\mathsf{A}_2)=\Lambda^i{}_k(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2)$ も自明だから，次の同型を証明したことになる ((4.33), (4.37)を満たす 2 つの行列 A は符号を除いて一致する)．

$$Spin(2,\mathbb{H})/Z_2\cong L_+^\uparrow.$$

従って，

$$\Psi=\begin{pmatrix}\zeta^1\\ \zeta^2\end{pmatrix},\quad \zeta^1,\zeta^2\in\mathbb{H},\quad \Psi'=\mathsf{A}\Psi,\quad \mathsf{A}\in Spin(2,\mathbb{H}) \tag{4.41}$$

で変換する量は Lorentz 群のスピノルである．これは $Spin(2,\mathbb{H})$ **スピノル** ある

いは，**四元数 Dirac スピノル**である．四元数 Dirac スピノルは四元数の Pauli 表現 (1.40e) により普通の 4 成分 Dirac スピノルと関係するが，形式上は 4×2 行列になる．この点は次章で詳論する．

(4.41) で変換する量が四元数 Dirac スピノルであることを見るには，

$$\mathring{\gamma}_\mu = \sigma_3 \tilde{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu \sigma_3,$$

で定義される**四元数 Dirac 行列**[19)]は，(4.39) から次の Dirac 代数

$$\mathring{\gamma}_\mu \mathring{\gamma}_\nu + \mathring{\gamma}_\nu \mathring{\gamma}_\mu = -2\eta_{\mu\nu}\mathbf{1}_2$$

を満たすこと，一方変換 (4.38a,b) は同一の式

$$\Lambda^\mu{}_\nu\, \mathring{\gamma}^\nu = \mathsf{A}^{-1}\, \mathring{\gamma}^\mu \mathsf{A}$$

に融合することに注意すればよい．実際，これを (2.44a) と比較して，$Spin(2,\mathbb{H})$ は Lorentz 群の，四元数を用いた Dirac 表現に他ならないことがわかる．それ故，$\boldsymbol{\Psi}$ は四元数 Dirac スピノルなのである．

それでは，$Spin(2,\mathbb{H})$ の生成演算子はどのようにして求まるだろうか．そのため，(4.38a) の右から $\tilde{\Gamma}^\nu$ を掛け，ν について和を取ってから，関係式

$$\Gamma_\nu \mathsf{A}^\dagger \tilde{\Gamma}^\nu = -4\mathrm{Re}\,\mathsf{A}^T, \quad (\mathrm{Re}\,\mathsf{A}^T)^{-1} = \frac{1}{Q_0^2+P_0^2}\mathrm{Re}\,\mathsf{A},$$

$$Q_0^2+P_0^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\Lambda, \quad \mathrm{tr}\,\Lambda = \Lambda^\mu{}_\mu \qquad (\mathrm{Re}\,[\Gamma_\mu\tilde{\Gamma}^\nu] = -\eta_\mu{}^\nu\mathbf{1}_2\text{から})$$

を用いると，

$$\mathsf{A} = -\frac{1}{\mathrm{tr}\,\Lambda}(\Lambda^\mu{}_\nu \Gamma_\mu \tilde{\Gamma}^\nu)(\mathrm{Re}\,\mathsf{A}) \tag{4.42}$$

を得ることに注意する．この式を用いて，無限小 Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ に対応する生成演算子を次の形に求めることができる．

$$\mathsf{A} = \mathbf{1}_2 + \boldsymbol{\Sigma}, \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}} = -\boldsymbol{\Sigma}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^\nu - \Gamma^\nu\tilde{\Gamma}^\mu) \tag{4.43a}$$

交換関係

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = 2[\eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho}] \tag{4.43b}$$

は (2.15d) と同じである．

4.5 複素四元数とスピノル

第 2.2 節で述べたように，固有 Lorentz 群の Dirac 表現は可約で，2 つの異値既約な Weyl 表現の直和表現である．それ故，Dirac スピノルに作用する Lorentz 変換の行列 $S(\Lambda)$ は，(2.34) で与えられるように，Weyl 表示で，ブロック対角的な形をとる．しかし，もちろん各ブロックを対角的にすることはできない．Weyl 表現は 2 次元の既約表現だからである．

四元数行列 A による Dirac 表現について言えば，それが丁度 2 次の行列なので，Dirac 表現の可約性による‘ブロック対角的な形への移行’は必然的に対角行列を生むはずである．従って，その固有値問題が，畢竟 Dirac 表現の既約分解を与えることになる．この節では，四元数行列 A の固有値問題を調べて，その対角化を実行する．そのとき，四元数と可換な虚数単位の存在が要求され，それを普通の虚数単位 i とすれば，対角成分が Weyl スピノルに働く Lorentz 変換である複素四元数になることが結論される．

そこで，四元数行列 A の固有値方程式

$$\begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.44a}$$

を考える．ただし，四元数 Q, P は次の条件に従う．

$$|Q|^2 - |P|^2 = 1, \quad \bar{P}Q + \bar{Q}P = 0 \tag{4.44b}$$

固有値 λ も固有ベクトルも四元数の範囲では解がないことを見るであろう．しかし，複素四元数にまで拡げれば，固有値問題の解は存在する．

(4.44a) で定義される固有値 λ は，四元数行列式として，Ddet を用いれば，方程式

$$\mathrm{Ddet}\begin{pmatrix} Q-\lambda & -P \\ P & Q-\lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{4.45a}$$

から決まる．$P = 0$ のときは，Ddet $\begin{pmatrix} Q-\lambda & 0 \\ 0 & Q-\lambda \end{pmatrix} = |(Q-\lambda)^2| = 0$ は縮退

根 $\lambda = Q$ を持つ．$P \neq 0$ のときは，$Q - \lambda \neq 0$ と仮定してよい[20)]．そのとき，

$$\mathrm{Ddet}\begin{pmatrix} Q-\lambda & -P \\ P & Q-\lambda \end{pmatrix} = \left|(Q-\lambda)(Q-\lambda+P(Q-\lambda)^{-1}P)\right| = 0 \tag{4.45b}$$

すなわち

$$Q - \lambda + P(Q-\lambda)^{-1}P = 0 \tag{4.45c}$$

が成り立たねばならない．言い換えれば，

$$u \equiv P^{-1}(Q-\lambda) = -(Q-\lambda)^{-1}P = -u^{-1} \tag{4.45d}$$

となる．それ故，$u^2 = -1$ が成り立つ．これは，$|u| = 1$, 従って，$\bar{u} = -u$ を意味する．また，(4.45d) から

$$Pu = Q - \lambda = uP \tag{4.45e}$$

が導けるので，u は任意の四元数と可換な，自乗すれば -1 になる数である[21)]．則ち，固有値問題 (4.44a) は必然的に四元数と可換な虚数単位の存在を要求することになった．そのような性質をもつ虚数単位として，複素数の虚数単位 i を選ぶのは，ごく自然なことである．そこで，以下では，$u = i$ とおく．このとき，$\bar{i} = i^* = -i$ で，$|i| = \sqrt{ii^*} = 1$ となる．ここに，四元数共役とは，独立な新しい複素共役が導入され，それを * で表す．従って，固有値は複素四元数

$$\lambda = Q \pm iP \tag{4.46a}$$

で与えられる．このときの四元数共役は，i の符号を変えない

$$\bar{\lambda} = \overline{Q} \pm i\overline{P} \tag{4.46b}$$

で与えられることに注意しよう．

固有値 $\lambda_1 = Q - iP$ に属する規格化された[22)]固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

であり，固有値 $\lambda_2 = Q + iP$ に属する規格化された固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

となることは容易にわかる．A を対角化する (複素四元数) ユニタリ行列は

$$T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \tag{4.47a}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{4.47b}$$

で与えられ,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} U = Q - iP \\ U^* = Q + iP \end{cases} \tag{4.47c}$$

となる．ここで，複素四元数の複素共役は単に，i の符号を変えるだけで，Hamilton の虚数単位の符号には手をつけていないことに注意されたい．(4.46) と (4.47c) は複素四元数に対しては，四元数共役と複素共役の 2 種類の共役が定義されるべきことを述べている．複素四元数は体をなさないので，複素四元数行列に対しては，(規格化された) Dieudonné の行列式は定義できないが，(4.9a) で定義される Study の行列式は意味を持つ．なぜなら，(1.36) のシンプレクティック表示は複素四元数に対しても定義できるからである．(4.9a) によって，行列 $T, T^{-1}\mathsf{A}T$ の行列式を e_3 を虚数単位とする 4 次元の行列式で表して，

$$\mathrm{Sdet}\, T = \mathrm{Sdet} \begin{pmatrix} Q - iP & 0 \\ 0 & Q + iP \end{pmatrix} = 1 \tag{4.48a}$$

となることがわかる．ここで，(4.16b) が

$$U\overline{U} = (Q - iP)(\overline{Q} - i\overline{P}) = Q\bar{Q} - P\overline{P} - i(Q\overline{P} + P\overline{Q}) = 1 \tag{4.48b}$$

に等価になることを用いた．

複素四元数の一般的な記法を確立するために，(4.19b)，(4.25b) の定義によって，行列 $\Gamma^\mu, \tilde{\Gamma}^\mu$ はまたユニタリ行列 (4.47) により対角化できることに注意しよう．

$$T^{-1}\Gamma^\mu T = \begin{pmatrix} -b^\mu & 0 \\ 0 & -\bar{b}^\mu \end{pmatrix} \tag{4.49a}$$

$$T^{-1}\tilde{\Gamma}^{\mu}T = \begin{pmatrix} -\bar{b}^{\mu} & 0 \\ 0 & -b^{\mu} \end{pmatrix} \tag{4.49b}$$

ここで,

$$b_0 \equiv e_0, \quad b_1 \equiv ie_1, \quad b_2 \equiv ie_2, \quad b_3 \equiv ie_3, \quad b^{\mu} = \eta^{\mu\nu}b_{\nu} \tag{4.49c}$$

と定義した. $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ は複素四元数の基底をなすもので,

$$b_{\mu}\bar{b}_{\nu} + b_{\nu}\bar{b}_{\mu} = -2\eta_{\mu\nu}, \quad \bar{b}_{\mu}b_{\nu} + \bar{b}_{\nu}b_{\mu} = -2\eta_{\mu\nu} \tag{4.49d}$$

という関係に従う. これは, (4.49a,b) の対角化と関係式 (4.39) から導けるが, 直接にも確かめられる. たとえば, (1.24) は次式に移行する.

$$\begin{cases} b_0^2 = b_0, \quad b_0 b_i = b_i b_0 \\ b_i b_j = \delta_{ij} b_0 + i\varepsilon_{ijk} b_k \end{cases}$$

この複素四元数の基底の乗積表は表 2 で示した. この基底を使うと, 任意の複素四元数 q は次のように表される*23).

$$q = b_0 q^0 + b_1 q^1 + b_2 q^2 + b_3 q^3 \equiv b_{\mu} q^{\mu}, \quad q^{\mu} \in \mathbb{C} \tag{4.50}$$

このような q の集合を今後 $\mathbb{H}^c$ とかく. 同じ q という記号を使うので, 紛らわしいかも知れないが, $q \in \mathbb{H}$ とかけば, これまでのように (実) 四元数を表す. 複素四元数の四元数共役は (4.46) で注意したように, 次式で定義される.

$$\bar{q} = b_0 q^0 - b_1 q^1 - b_2 q^2 - b_3 q^3 = \bar{b}_{\mu} q^{\mu} \tag{4.51a}$$

表 2　複素四元数の基底 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ の乗積表.
第 1 列掛ける第 1 行の結果を表す.

	b_0	b_1	b_2	b_3
b_0	b_0	b_1	b_2	b_3
b_1	b_1	b_0	ib_3	$-ib_2$
b_2	b_2	$-ib_3$	b_0	ib_1
b_3	b_3	ib_2	$-ib_1$	b_0

ただし，$\overline{b}_0 = b_0$, $\overline{b}_i = -b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. また，(4.47c) で定義されたように，複素四元数の複素共役は

$$q^* = b_0(q^0)^* - b_1(q^1)^* - b_2(q^2)^* - b_3(q^3)^* \tag{4.51b}$$

となる．なぜなら，$b_0^* = b_0, b_i^* = -b_i$ $(i = 1, 2, 3)$ だから．(4.47c) の U は (4.48b) を満たすので，非コンパクトな群

$$SL(1, \mathbb{H}^c) = \{q \in \mathbb{H}^c;\ |q| = 1\}$$

に属する．ここで，複素四元数 $q \in \mathbb{H}^c$ のノルムの自乗

$$|q|^2 = q\overline{q} = \overline{q}q = -\eta_{\mu\nu}q^\mu q^\nu \tag{4.52}$$

は組成法則を満足する ($|qp| = |q||p|, q, p \in \mathbb{H}^c$) けれど，非負ではないので，$\mathbb{H}^c$ は最早組成代数 (ノルム多元環) ではない．従って，条件 $|q| = 1$ は，$q \in \mathbb{H}^c$ のとき，非有界なパラメータ空間を意味する．

以上の対角化の操作により，Lorentz 変換 (4.36)，(4.37) も次のように対角化される．

$$T^{-1}\mathsf{X}T = \begin{pmatrix} -\mathsf{x} & 0 \\ 0 & -\overline{\mathsf{x}} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = b_\mu x^\mu, \quad |\mathsf{x}|^2 = -\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{4.53a}$$

$$T^{-1}\mathsf{X}'T = \begin{pmatrix} -U\mathsf{x}U^\dagger & 0 \\ 0 & -U^*\overline{\mathsf{x}}U^{*\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathsf{x}' & 0 \\ 0 & -\overline{\mathsf{x}}' \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{x}' = b_\mu x'^\mu \tag{4.53b}$$

複素四元数の場合は，(4.51a,b) の共役以外にエルミート共役を取る作用 ($\dagger$ で示す) も定義される．

$$q^\dagger = b_0(q^0)^\dagger + b_1(q^1)^\dagger + b_2(q^2)^\dagger + b_3(q^3)^\dagger. \tag{4.54}$$

ここで，$(q^\mu)^\dagger$ は普通の (複素行列に対する) エルミート共役を意味するが，q^μ が複素数のときは $q^* = \overline{q}^\dagger$ が成り立つ．特に，時空座標を表す複素四元数 $\mathsf{x} = b_\mu x^\mu$ はエルミートになる．これは，丁度，Lorentz 群を複素四元数で扱う場合の，虚時間座標の導入に対応する．従って，Lorentz 群に対する，伝統的な複素四元数アプローチ[24)]を再現するわけだが，この節で，それが 2 次の四元数行列から出発すれば，純粋に代数的な対角化の過程を通して四元数と可換な虚数単位

の存在が自然に生まれることが示された．

次に，$Spin(2,\mathbb{H})$ スピノル (4.41) から $SL(2,\mathbb{C})$ Weyl スピノルを導くのに，上の対角化に現れた行列 T が，重要な役割を果たすことを見よう．まず (4.47b) を用いて，

$$T^{-1}\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^1 - i\zeta^2) \equiv b_\mu \psi^\mu \\ \psi^* = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^1 + i\zeta^2) \equiv (b_\mu)^*(\psi^\mu)^* = \bar{\psi}^\dagger \end{cases} \tag{4.55a}$$

$$T^{-1}\mathsf{A}\Psi = \begin{pmatrix} U\psi \\ U^*\psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi'^* \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \psi' = U\psi, \\ \psi'^* = U^*\psi^* \end{cases} \tag{4.55b}$$

を得る．$U \in SL(1,\mathbb{H}^c)$ なので，ψ は $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノル である[25]．従って，複素四元数で表した座標と $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルの Lorentz 変換は

$$\mathsf{x}' = U\mathsf{x}U^\dagger, \tag{4.56a}$$

$$\psi' = U\psi, \quad U \in SL(1,\mathbb{H}^c) \tag{4.56b}$$

及びその四元数 (および複素) 共役で与えられる．これらの式が Lorentz 群と Dirac 理論に対する複素四元数アプローチの基礎となっている．複素四元数アプローチについては，古くから多くの研究がある[24]．ここでは，$SL(1,\mathbb{H}^c)$ が固有 Lorentz 群の普遍被覆群 $\overline{SO}(3,1)$ に同型であることを簡単に復習しておこう．

複素四元数 $q \in \mathbb{H}^c$ の実部，虚部は四元数 $q \in \mathbb{H}$ に対するのと同じ式で定義されるので，複素四元数の実部 $\mathrm{Re}\,[q]$ は一般に複素数である．複素四元数に対しても，$\mathrm{Re}\,[qp]{=}\mathrm{Re}\,[pq]$ は成り立つ．さらに，任意の $p,q \in \mathbb{H}^c$ に対して，$\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}, (qp)^\dagger = p^\dagger q^\dagger$ も成り立つ．

さて，(4.56a) は $x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ とおくと，$\mathrm{Re}\,[b_\mu \bar{b}_\nu] = -\eta_{\mu\nu}$ を使って，

$$\Lambda^\mu{}_\nu(U) b_\mu = U b_\nu U^\dagger, \quad \Lambda^\mu{}_\nu(U) = -\mathrm{Re}\,[U b_\nu U^\dagger \bar{b}^\mu] \tag{4.57}$$

が導けるので，$\Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu(U)$ は U の連続関数である．明らかに，$\Lambda^0{}_0 = \mathrm{Re}\,[UU^\dagger] = \mathrm{Re}\,[(Q-iP)(\bar{Q}+i\bar{P})] = |Q|^2 + |P|^2 = |Q|^2 - |P|^2 + 2|P|^2 = 1 + 2|P|^2 \geqq 1$. また，連続性から，$U \to 1$ のとき，$\Lambda^\mu{}_\nu(U) \to \Lambda^\mu{}_\nu(1) = \eta^\mu{}_\nu$ なので，$\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = 1$[26]．さらに，$\Lambda^\mu{}_\nu(U_1)\Lambda^\nu{}_\rho(U_2) = \Lambda^\mu{}_\rho(U_1U_2), \Lambda^\mu{}_\nu(U) = \Lambda^\mu{}_\nu(-U)$ は容易に示せるので，

$$SL(1, \mathbb{H}^c)/Z_2 \cong L^\uparrow_+$$

が証明されたことになる．なお，単位複素四元数 U を Lorentz 変換のパラメータ $\Lambda^\mu{}_\nu$ で表すこともできて，

$$U = \pm \frac{\Lambda^\mu{}_\nu b_\mu \bar{b}^\nu}{|\Lambda^\mu{}_\nu b_\mu \bar{b}^\nu|} \tag{4.58}$$

となる．これを導く際，$b_\mu q \bar{b}^\mu = -2(q + \bar{q})$ を使った．無限小変換 $\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ に対しては，$U(I+\omega) = 1 - \dfrac{1}{8}\omega_{\mu\nu}(b^\mu \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^\mu)$ となる．これは，$SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノル ψ に対する無限小 Lorentz 変換の生成演算子が $(b^\mu \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^\mu)/2$ となることを示している．

最後に，

$$SL(1, \mathbb{H}^c) \cong SL(2, \mathbb{C}) \tag{4.59}$$

を確かめれば，我々のよく知っている同型 $SL(2, \mathbb{C})/Z_2 \cong L^\uparrow_+$ を，複素四元数を用いて証明できたことになる．この最後のステップは $SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルの Lorentz 変換 (4.55b) がスピノル表現の表現空間の Weyl 基底を与えていることも教えてくれなければならない．

実は，(4.59) の同型もよく知られている．具体的な同型写像は四元数のシンプレクティック表示を使った，Pauli 表現から導かれる．いまは，スピノルの変換則も導きたいので，(1.40e) の行列表現を $e_3 = \mp i$ とおいた場合の 2 つの Pauli 表現を書いておく[27]．

$$\rho(q) = f(q)|_{e_3=-i} = \begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -q_2 - iq_1 \\ q_2 - iq_1 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix}, \tag{4.60a}$$

$$\bar{\rho}(q) = f(q)|_{e_3=i} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & -q_2 + iq_1 \\ q_2 + iq_1 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix}. \tag{4.60b}$$

従って，

$$\mathrm{Re}\,[q] = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\rho(q) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\bar{\rho}(q) = q_0. \tag{4.60c}$$

当然であるが，ρ と $\bar{\rho}$ は同値である．

$$\varpi\bar{\rho}(q)\varpi^{-1} = \rho(q)$$

複素四元数の基底の Pauli 表現は，

$$\rho(b_\mu) = \sigma_\mu, \quad \rho(\bar{b}_\mu) = \bar{\sigma}_\mu, \quad \bar{\rho}(b_\mu) = \bar{\sigma}^*_\mu, \quad \bar{\sigma}_\mu = \varpi\sigma^*_\mu\varpi^{-1} \tag{4.61}$$

である．

さて，Pauli 表現の定義により，$\rho(\mathsf{x}) = x^\mu\sigma_\mu = X$ は (2.19) に等しく，Lorentz 変換 (4.56a) の Pauli 表現 $\rho(\mathsf{x}') = \rho(U)\rho(\mathsf{x})\rho(U^\dagger)$ は (2.20) を与える．

$$X' = AXA^\dagger, \quad A \equiv \rho(U) = (\sigma_\mu U^\mu) \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{4.62}$$

ここで，$\det(\sigma_\mu U^\mu) = 1$ は $U\overline{U} = 1$ から導ける．従って，(4.59) を得る．$SL(2,\mathbb{C})$ スピノル解析は，定義 (2.19) に基づいて，上式から始まり，(2.25) と (2.30) の Weyl スピノル ξ および $\overline{\eta}$ の導入とその (様々な積についての) 性質を解明することにあった．一方，$SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノル (4.55a) に関しては，次のようなステップを踏む．$SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルの Lorentz 変換 (4.56b) を $\psi' = U\psi = (Ub_\mu)\psi^\mu = (b_\nu U^\nu)b_\mu\psi^\mu = b_\mu\psi'^\mu$ とかいて，ψ'^μ を ψ^ν の線形結合で表せば，

$$\psi'^\mu = (\Omega_\rho U^\rho)^\mu{}_\nu\psi^\nu \tag{4.63a}$$

となることがわかる．ここで，Ω_μ は

$$Ub_\mu = (\Omega_\rho U^\rho)^\nu{}_\mu b_\nu, \quad U = b_\rho U^\rho, \quad U^\rho \in \mathbb{C} \tag{4.63b}$$

で定義される基底 b_μ の 4 次元表現で，

$$\omega(b_0) \equiv \Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \omega(b_1) \equiv \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega(b_2) \equiv \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \omega(b_3) \equiv \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.63c}$$

であるが，この表現は可約である．

$$V\omega(q)V^{-1} = \begin{pmatrix} \rho(q) & 0 \\ 0 & \bar{\rho}(q) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.63d}$$

この事実を使えば，(4.63a) は

$$(V\psi)'^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho(U) & 0 \\ 0 & \bar{\rho}(U) \end{pmatrix}_{\mu\nu} (V\psi)^{\nu} \tag{4.63e}$$

とかける．それ故，

$$\begin{aligned} \xi^1 &= (V\psi)^0 = \psi^0 + \psi^3, \quad \xi^2 = (V\psi)^1 = \psi^1 + i\psi^2, \\ \eta_1 &= (V\psi)^2 = \psi^0 - \psi^3, \quad \eta_2 = (V\psi)^3 = -\psi^1 + i\psi^2 \end{aligned} \tag{4.64a}$$

とおけば，(4.63e) は，$A \equiv \rho(U)$ に対し，$\overline{\rho}(U) = \rho^{T\,-1}(U) = A^{T\,-1}$ であることに注意すれば，

$$\xi' = A\xi \tag{4.64b}$$

$$\eta' = A^{T\,-1}\eta \tag{4.64c}$$

となる．(4.64b) は (2.25)，(4.64c) の複素共役は (2.30) を与える．このようにして，$SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルから，Lorentz 群の表現 $D^{(1/2,0)}$ に属する Weyl スピノル ξ と，それに反傾な表現に属する Weyl スピノル η が定義できた．2 成分スピノルの添字を示すには，さらに，**四元数のスプリット基底**と呼ばれる

$$\begin{aligned} v_1 &= (bV^{-1})_0 = \frac{1}{2}(b_0 + b_3), \quad v_2 = (bV^{-1})_1 = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2), \\ v^1 &= (bV^{-1})_2 = \frac{1}{2}(b_0 - b_3), \quad v^2 = (bV^{-1})_3 = -\frac{1}{2}(b_1 + ib_2), \end{aligned} \tag{4.65}$$

を定義して，

$$\psi = b_\mu \psi^\mu = (bV^{-1})_\mu (V\psi)^\mu = v_\alpha \xi^\alpha + v^\alpha \eta_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2), \tag{4.66a}$$

を得る．この分解（を簡単のため，**四元数カイラル分解**と呼ぶ）は射影演算子 $E_\pm = (b_0 \pm b_3)/2$ を用いて，

$$\psi = \psi(E_+ + E_-) \equiv \psi_L + \psi_{\overline{R}},$$
$$\psi_L \equiv \psi E_+ = v_\alpha \xi^\alpha, \quad \psi_{\overline{R}} \equiv \psi E_- = v^\alpha \eta_\alpha, \tag{4.66b}$$

のようにも得られる．実際，$v_1 = b_0 E_+ = b_3 E_+, v_2 = b_1 E_+ = -ib_2 E_+, v^1 = b_0 E_- = -b_3 E_-, v^2 = -b_1 E_- = -ib_2 E_-$ である．つまり，Lorentz 群の表現 $D^{(1/2,0)}$ に属する Weyl スピノル ξ^α とそれに反傾な表現に属する Weyl スピノル η_α は，それぞれ，$SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノル ψ の L-成分 ψ_L, $\overline{R}$-成分 $\psi_{\overline{R}}$ に含まれる．それ故，四元数カイラル分解は 4 成分 Dirac スピノルの (Weyl 表示における) カイラル分解 (3.39) とは異なるけれど，まさにそのことによって，Lorentz 変換のもとで，四元数カイラル成分は同じ複素四元数 $U \in SL(1,\mathbb{H}^c)$ の左移動により，それ自身で線形変換を受ける．もちろん，複素共役 ψ^* を取ることにより，Lorentz 群の表現 $D^{(0,1/2)}$ に属する Weyl スピノル $\bar{\eta}_{\dot\alpha} = (\eta_\alpha)^*$ とそれに反傾な表現に属する Weyl スピノル $\bar{\xi}^{\dot\alpha} = (\xi^\alpha)^*$ が定義できる．実際，複素四元数 の基底とスプリット基底の乗積表 (表 3) から得られる

$$b^\mu v_\alpha = v_\beta (\sigma^\mu)_{\beta\alpha}, \quad b^\mu v^\alpha = v^\beta (\bar{\sigma}^{\mu\,*})_{\beta\alpha},$$
$$\bar{b}^\mu v_\alpha = v_\beta (\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha}, \quad \bar{b}^\mu v^\alpha = v^\beta (\sigma^{\mu\,*})_{\beta\alpha}, \tag{4.67}$$

を使えば，関係 $v_\alpha^* = v^\alpha, v^{\alpha\,*} = v_\alpha$ に注意して，(2.25), (2.30) およびそれらの複素共役変換則が得られる．また，$[(b^\mu \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^\mu)/2] v_\alpha = v_\beta (\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}$ および，$[(b^\mu \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^\mu)/2] v^\alpha = v^\beta (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^*_{\beta\alpha}$ によって Weyl スピノル $\xi, \overline{\eta}$ に対する無限小 Lorentz 変換の生成演算子，(2.28b)，(2.31a) を得る．なお，(4.67) と並んで，次の公式も後に使う．

$$\mathrm{Re}\,[v_\alpha v_\beta^\dagger\,] = \mathrm{Re}\,[v^\alpha v^{\beta\,\dagger}] = \mathrm{Re}\,[\overline{v_\alpha} v^\beta] = \mathrm{Re}\,[\overline{v^\alpha} v_\beta] = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$$
$$\mathrm{Re}\,[v_\alpha v^{\beta\,\dagger}] = \mathrm{Re}\,[v^\alpha v_\beta^\dagger] = \mathrm{Re}\,[\overline{v_\alpha} v_\beta] = \mathrm{Re}\,[\overline{v^\alpha} v^\beta] = 0 \tag{4.68}$$

この章で展開した，四元数アプローチにおいては，初めから虚数単位，すなわち，虚時間座標を導入することなく，理論の結果として，複素四元数を用いた $SL(2,\mathbb{C})$ Weyl スピノルの定義がなされた．その際，固有 Lorentz 群の Dirac 表現が可約であることが本質的であった．このように，Lorentz 群の表現論では自明のことが，四元数アプローチでは一定の役割を果たすのである．なお，次の 2 つの章で頻繁に使うスプリット基底の間の乗積表を表 5 に与えた．

表 3 複素四元数の基底 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ とスプリット基底 $\{v_1, v_2, v^1, v^2\}$ の乗積表. 第 1 列掛ける第 1 行の結果を表す.

	v_1	v_2	v^1	v^2
b_0	v_1	v_2	v^1	v^2
b_1	v_2	v_1	$-v^2$	$-v^1$
b_2	iv_2	$-iv_1$	iv^2	$-iv^1$
b_3	v_1	$-v_2$	$-v^1$	v^2

表 4 スプリット基底 $\{v_1, v_2, v^1, v^2\}$ と複素四元数の基底 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ の乗積表. 第 1 列掛ける第 1 行の結果を表す.

	b_0	b_1	b_2	b_3
v_1	v_1	$-v^2$	iv^2	v_1
v_2	v_2	v^1	$-iv^1$	v_2
v^1	v^1	v_2	iv_2	$-v^1$
v^2	v^2	$-v_1$	$-iv_1$	$-v^2$

表 5 スプリット基底 $\{v_1, v_2, v^1, v^2\}$ の乗積表. 第 1 列掛ける第 1 行の結果を表す.

	v_1	v_2	v^1	v^2
v_1	v_1	0	0	v^2
v_2	v_2	0	0	$-v^1$
v^1	0	v_2	v^1	0
v^2	0	$-v_1$	v^2	0

第 4 章の注および参考文献

*1) 実四元数と複素四元数は区別される．本文で四元数といえば実四元数のことを意味する．

2) 一般の n 次の四元数行列式については，
H. Aslaksen, 'Quaternionic Determinants', The Mathematical Intelligencer, **18** (1996), no.3, pp.57-65.
M. L. Mehta, '*Matrix Theory, Selected Topics and Useful Results*', LES EDITIONS DE PHYSIQUE (1997)
に詳しい．Dieudonné の行列式については，
E. Artin, ' *Geometric Algebra*', 第 IV 章, Interscience Publishers, Inc. (1957).
を見よ．Aslaksen の論文は H. Aslaksen のホームページから on line で入手できる．この節では，最も簡単な $n=2$ とおいた場合を詳述する．

3) E. Artin が文献 2), p.155 に例示している一連の行基本操作を基本行列を用いて表したものが (4.1g).

4) 例えば，$\mathrm{Mdet}\left[\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & b'\\ \bar{b}' & \beta'\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & \beta\end{pmatrix}\cdot\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix}\alpha' & b'\\ \bar{b}' & \beta'\end{pmatrix}, \alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\mathbb{R}$ は一般の四元数 b, b' に対して成り立たない．ここで，左辺の Mdet はエルミートでない行列に対するものだから，置換群を用いて $\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=da-bc$ と定義する．Moore の行列式が一般に組成法則を満足しないというときは，この定義を使う．一般の四元数行列に対する Mdet をこのように定義すれば，α を実数として，明らかに $\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix}a & b\\ \alpha c & \alpha d\end{pmatrix}=\alpha\,\mathrm{Mdet}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が成り立つ．

5) いま，$K=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ とする．K のゼロでない元全体は乗法群 K^* を作る．その交換子群を $[K^*,K^*]$ とかく．これは任意の $a,b\in K^*$ にたいし，$ab(ba)^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ の形の元の集合で，これは (4.5a,b) 下で述べたように K^* の不変部分群である．$K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ のように可換体のときは，$K^*=\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*$ は可換群で，その交換子群は単位元のみからなる．剰余群 $K^*/[K^*,K^*]$ の元を $[\ a\ ]$, $a\in K^*$ とかく．K^* から $K^*/[K^*,K^*]$ への準同型写像を f とかけば，$f(a)=[a]$ で，$[K^*,K^*]$ はその核である．ゆえに，$f(aba^{-1}b^{-1})=1$ となり，$f(a)=[a]$ は可換であることがわかる．

6) 一般的な証明は，H. Aslaksen, 文献 2) を見よ．

7) F. J. Dyson, 'Quaternion Determinants', Helv. Physica. Acta, **45** (1972), pp.289-302.

8) P. A. M. Dirac, 'Application of Quaternions to Lorentz transfirmations', Proc. Roy. Irish Acad. (Dublin), **A 50** (1945) pp.261-270.

9) よく知られているように，複素数の分数変換 $z\to z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $z,a,b,c,d\in\mathbb{C}$ の係

数行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は一般性を失うことなく $SL(2,\mathbb{C})$ に属する．また，$\pm A$ は同じ分数変換に対応する．もし，$z = \dfrac{z_1}{z_2}$ とおけば，$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ は 2 成分スピノルとして変換する．

10) 四元数 a, b, c, d を決める 16 個の実数の比．

11) Dirac は文献 8) において，ゼロでない実数 r, s を用いて，$X^{4\prime} = rX^4, X^{5\prime} = sX^5$ とおいたので，(4.15d) の代わりに $r = \pm|a|^2(1+\mu^2)$, $s = |d|^2(1+\mu^2)$, $1+\mu^2 \neq 0$, $d = \pm a$ という解を得た．$(r,s) = (1,1)$ はプラス符号をとることに相当する．

12) T. Kugo and P. Townsend, 'Supersymmetry and Division Algebras', Nucl. Phys. **221**(1983), pp.357-380.

13) 一般に，符号数 $(1,q)$ を持つ擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{1,q}$ の共形群は $SO(q+1,2)$ である．

14) $\boldsymbol{\sigma}$ は複素行列だが，Γ_I $(I = 0, 1, \cdots, 5)$ は四元数行列である．しかし，今後四元数行列方程式で $\Gamma_{4,5}$ を使う必要があっても，$\sigma_{1,3}$ の要素 $0, \pm 1$ はすべて四元数に属すと考え，より慣れた記号 $\sigma_{1,3}$ を使う．(2.21b) の ϖ についても同様である．

15) (4.12a) により，$\mathrm{Mdet}\,\mathcal{X}' = \mathrm{Mdet}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)\cdot\mathrm{Mdet}\,\mathcal{X} = \mathrm{Sdet}\,\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{Mdet}\,\mathcal{X} = \mathrm{Mdet}\,\mathcal{X} \to X'^2 = X^2$．Ddet, Sdet の場合は，$\det\mathcal{X}' = \det\mathcal{X}$ は $|X'^2| = |X^2|$ に導くが，後に，条件 $\eta_{IJ}\Lambda^I{}_K\Lambda^J{}_L = \eta_{KL}$ が満たされていることを示す．従って，どの四元数行列式を選んでも，$\det\mathcal{X}' = \det\mathcal{X} \to X'^2 = X^2$ である (ただし，Det の場合は，実数の α に対して $[\alpha] = |\alpha|$ とおけるとして)．

16) 実は，第 2.2 節で述べた ϖ 算法は，これと同じことをやっている．なお，$SL(2,\mathbb{C})$ の場合と同じく，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}$ は異値既約表現である．四元数の場合は，一般に $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^T \neq \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$ なので，$\boldsymbol{A}^{T\,-1}$ は最早表現ではない．また，一般に $\overline{\boldsymbol{AB}} \neq \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$ なので，$\overline{\boldsymbol{A}}$ も表現にはならない．ゆえに，$SL(2,\mathbb{H})$ スピノルは，2 種ある．これは，$SL(2,\mathbb{C})$ の 2 つの Weyl スピノルに対応し，$\boldsymbol{\Psi}$ だけからは不変量が作れないことを意味する．$\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\boldsymbol{\Phi}$ で変換する，異なる表現に属する $SL(2,\mathbb{H})$ スピノル $\boldsymbol{\Phi}$ を用意すれば，$\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Psi}$ は不変量である．

17) これは次のようにして直接にも証明できる．(4.24), (4.26b) から，

$$
\begin{aligned}
&(\Lambda^I{}_0\Gamma_I)(\Lambda^J{}_1\tilde{\Gamma}_J)(\Lambda^K{}_2\Gamma_K)(\Lambda^L{}_3\tilde{\Gamma}_L)(\Lambda^M{}_4\Gamma_M)(\Lambda^N{}_5\tilde{\Gamma}_N) \\
&= (\boldsymbol{A}\Gamma_0\boldsymbol{A}^\dagger)(\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_1\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{A}\Gamma_2\boldsymbol{A}^\dagger)(\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_3\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{A}\Gamma_4\boldsymbol{A}^\dagger)(\boldsymbol{A}^{\dagger\,-1}\tilde{\Gamma}_5\boldsymbol{A}^{-1}) \\
&= \boldsymbol{A}(\Gamma_0\tilde{\Gamma}_1\Gamma_2\tilde{\Gamma}_3\Gamma_4\tilde{\Gamma}_5)\boldsymbol{A}^{-1}
\end{aligned}
$$

を得る．両辺のトレースを取る際，公式

$$\mathrm{Tr}\,[\Gamma_I\tilde{\Gamma}_J\Gamma_K\tilde{\Gamma}_L\Gamma_M\tilde{\Gamma}_N] = \eta_{IJ}\text{等を含む 15 項} + 2\varepsilon_{IJKLMN},$$

(ε_{IJKLMN} は 6 次元の Levi-Civita シンボルで，$\varepsilon_{012345} = -1$) を使い，

$\eta_{IJ}\Lambda^J{}_K\Lambda^J{}_L = \eta_{KL}$ などに注意すれば，

$$-\varepsilon_{IJKLMN}(\Lambda^I{}_0\Lambda^J{}_1\Lambda^K{}_2\Lambda^L{}_3\Lambda^M{}_4\Lambda^N{}_5) = +1$$

となり，$\det(\Lambda^I{}_J) = 1$ が得られる．

18) $SL(2,\mathbb{H})$ の場合と違って，今度は，A と $\mathsf{A}^{\dagger\,-1} = \mathsf{A}^T$ は同値である．なぜなら，正則な行列 σ_3 によって，$\sigma_3\mathsf{A}\sigma_3^{-1} = \mathsf{A}^T$ となるから (σ_3 の代わり，σ_1 でも良い)．その結果，$Spin(2,\mathbb{H})$ スピノルはただ 1 つしかなく，それが四元数 Dirac スピノルなのである．これは，(4.41) で定義されるスピノル Ψ だけから不変量ができることを意味する．実際，(4.33) の拘束条件は $\mathsf{A}^\dagger\sigma_{1,3}\mathsf{A} = \sigma_{1,3}$ に導くので，2 つの不変量 $\Psi^\dagger\sigma_{1,3}\Psi$ の存在を示している．丁度 Dirac スピノル ψ から作られる，固有 Lorentz 群に関する 2 つの不変量 $\overline{\psi}(1,\gamma_5)\psi$ の存在に対応している．

19) P. Rotteli, 'The Dirac Equation on the Quaternion Field', Mod. Phys. Lett. **4**(1989), pp.933-940.

20) いま，$Q-\lambda = \varepsilon$ とおく．$\lim_{Q\to\lambda}$ Ddet $\begin{pmatrix} Q-\lambda & -P \\ P & Q-\lambda \end{pmatrix} = \lim_{Q\to\lambda} |(Q-\lambda)(Q-\lambda+P(Q-\lambda)^{-1}P)| = \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon(\varepsilon + P\varepsilon^{-1}P)| = \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon P\varepsilon^{-1}P| = \lim_{\varepsilon\to 0}|\varepsilon_\mu e_\mu P\dfrac{\varepsilon_\nu\bar{e}_\nu}{|\varepsilon|^2}P| = (1/4)|e_\mu P\bar{e}_\mu P| = |P_0 P| \neq 0$　$(P \neq 0)$ となるから，$P\neq 0$ なら，$\lambda = Q$ は解ではない (ただし，$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu = (1/4)|\varepsilon|^2\delta_{\mu\nu}$ を使った)．Sdet の場合も同様．もし，Det を採用したら，$\lim_{Q\to\lambda}$ Det $\begin{pmatrix} Q-\lambda & -P \\ P & Q-\lambda \end{pmatrix} = \lim_{Q\to\lambda}[(Q-\lambda)(Q-\lambda+P(Q-\lambda)^{-1}P)] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon(\varepsilon+P\varepsilon^{-1}P)] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon P\varepsilon^{-1}P] = [P^2] \neq 0$　$(P\neq 0)$ となるから，$P \neq 0$ なら，$\lambda = Q$ は解ではない．ここで ε が消えたのは剰余類を取っているからで，$\varepsilon = 0$ のときの $\varepsilon P\varepsilon^{-1}P$ は定義されていないにもかかわらず，上の極限操作を取ることにすれば，Det $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = [-bc]$ となる．

21) この結論は次の推論にもとづく．(4.45d) より，$\varrho = Q - \lambda$ とおけば，$P^{-1}\varrho = -(P^{-1}\varrho)^{-1}$ が得られる．この解は $\varrho = \pm Pu, \pm uP$ の 4 つある．ただし，$u = -u^{-1}$．それゆえ，縮退していない固有値として，(順序を除いて) 次の 6 個のセットが存在しうる．$(Q+Pu, Q+uP), (Q-Pu, Q-uP), (Q+Pu, Q-uP), (Q-Pu, Q+uP), (Q+Pu, Q-Pu), (Q+uP, Q-uP)$．今考えている行列は 2×2 型なので，独立な固有値は 2 つしかない．つまり，これらの 6 個の組は 1 つに代表されねばならない．これが成り立つのは，$Pu = \pm uP$ の場合だけである．けれども，$P = P_0 \in \mathbb{R}$ は u と交換するから，結局 $Pu = uP$ のみが実現する．このとき，最初の 2 つは縮退するので除かれる ($P = P_0 \in \mathbb{R}^*$ のときの固有値は $\lambda = Q \pm uP_0$ と縮退していない)．残りの 4 つの組は，$Pu = uP$ のとき (順序を除いて) すべて一致する．本文

(4.45e)の下で記述したように，$u = i$ とおけば，固有値は (4.46a) で与えられる．

22) ベクトルの内積は，$(a,b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \bar{a}c + \bar{b}d$ と定義する．

*23) 実四元数のときは，基底 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を用い，複素四元数のときは，基底 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ を用いる．

24) 複素四元数を用いると，Lorentz 変換がエレガントにかけることを最初に指摘したのは
F. Klein, ‘Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppen’, Physik. Zeitschr. XII (1911), pp.17-27 の脚注 I).
L. Silberstein, ‘Quaternionic Form of Relativity’, Phil. Mag. S. 6, Vol. 23, No. 137(1912), pp.790-809.
である．Klein の論文の脚注 I) に記してある (斉次)Lorentz 変換の式を Klein の記号のままでかくと次のようになる．i を普通の虚数単位，i_1, i_2, i_3 を四元数の虚数単位とし，$A, A', \cdots, D, D'$ を $AA' + BB' + CC' + DD' = 0,\quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$ に従う 8 つの実パラメータとする．このとき，(斉次) Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} &i_1x' + i_2y' + i_3z' + ict' \\ &= \begin{bmatrix} (i_1(A + iA') + i_2(B + iB') + i_3(C + iC') + (D + iD')) \\ \cdot(i_1x + i_2y + i_3z + ict) \\ \cdot(i_1(A - iA') + i_2(B - iB') + i_3(C - iC') - (D - iD')) \end{bmatrix} \\ &\quad \div[(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)] \end{aligned}$$

で与えられる．本文の式と比較するため，8 つのパラメータから 2 つの四元数

$$Q = i_1A + i_2B + i_3C + D, \quad Q' = i_1A' + i_2B' + i_3C' + D'$$

を定義すると，双一次形式に対する条件式は，$Q\overline{Q'} + Q'\overline{Q} = 0$, $(\overline{Q + iQ'})(Q + iQ') = \overline{Q}Q - \overline{Q'}Q' > 0$ となり，上の Lorentz 変換の式は

$$i_1x' + i_2y' + i_3z' + ict' = \frac{(Q + iQ')(i_1x + i_2y + i_3z + ict)(\overline{Q} - i\overline{Q'})}{Q\overline{Q} - Q'\overline{Q'}}$$

となる．$U = (Q + iQ')/\sqrt{Q\overline{Q} - Q'\overline{Q'}}$ とおけば，$U \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ だから，これは本質的に (4.56a) に等しい．四元数の 2 次元表現は既にわかっており，Pauli 行列の発見が 1927 年，van der Waerden によるスピノル解析が 1929 年であったことを考えると Klein のヒントが実に先見性に満ちていたことが分かる．残念ながら，我々が容易に手にすることのできるスピノル解析の総合報告
O. Laporte and G. E. Uhrenbeck, ‘Application of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equation’, Phys.Rev. **37**(1931), pp.1380-1397.
W. L. Bade and H. Jehle, ‘An Introduction to Spinors’, Rev. Mod. Phys.

25(1953), pp.714-728.
には Klein の論文の上記脚注にある注意は触れられていない．これは論文の主題が違うので，当然といえる．テンソル解析と同様なスピノル解析の発見により，特殊相対論における四元数の役割は忘れられた存在となったようである．しかしながら，四元数と 4 次元時空との関係を探ることはその後も細々と続けられた．例えば，
O. Fischer, 'Hamilton's Quternions and Minkowski Potentials', Phil. Mag. **27**(1939), pp.375-385.; 'Lorentz Transformation and Hamilton's Quaternions', Phil. Mag. **30**(1940), pp.135-150.
を見よ．複素四元数と Dirac 方程式の関係が
C. Lanczos, 'Tensoranalytischen Beziehungen der Diracschen Gleichung', Zeitschrift für Physik, **57**(1929), pp.447-473; 'Zur kovarianten Formulierung der Diracshen Gleichung', Zeitschrift für Physik, **57**(1929), pp.474-483.
A.W. Conway, 'Quaternionic Treatment of the Relativistic Wave Equation', Proc. Roy. Soc. (London), **A162**(1937), pp.145-154.
らの人により議論された．Lanczos の論文は，G. Gspnoer と J-P. Hurni により英訳されている．
C. Lanczos, 'The Tensor Analytical Relationships of Dirac's Equation', arXiv: physics/0508002 (2005).
C. Lanczos, 'On the Covariant Formulation of Dirac's Equation', arXiv:physics/0508012 (2005).
この主題に関しては，その他 F. Gürsey によるものも含め，数多くの論文がある．それらは
G. Gspnoer and J-P. Hurni, 'Quaternions in mathematical physics (2): Analytical biboliography', arXiv-math-ph/0511092v3 (2008)
に網羅されていると思われる．その中でも総合報告的な論文として
J. L. Synge, 'Quaternions, Lorentz Transformations, and the Conway-Dirac-Edding- ton Matrices', Communications of Dublin Insti. for Adv. Stud. **A21**(1972), pp.1-67.
を挙げたい．その他，
P. Rastall, 'Quaternions in Relativity', Rev.Mod. Phys. **36**(1964), pp.820-832.
は複素四元数の一般相対論への応用を議論している．しかし，一般相対論においても，強力なスピノル解析・テンソル解析という武器が浸透していて，複素四元数は殆ど顧みられなかったようである．

25) (2.33) と同じ記号を使うが，いまは 1 成分のスピノルである．第 2.2 節で定義した 4 成分 Dirac スピノルは (4.55a) の ψ^μ を適当に縦に並べたものである．この点は次章で詳しく調べる．

26) この式も直接証明できる．次の関係式

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} b_{\mu})(\Lambda^{\nu}{}_{\beta} \bar{b}_{\nu})(\Lambda^{\rho}{}_{\gamma} b_{\rho})(\Lambda^{\sigma}{}_{\delta} \bar{b}_{\sigma}) = (U b_{\alpha} U^{\dagger})(\bar{U}^{\dagger} \bar{b}_{\beta} \bar{U})(U b_{\gamma} U^{\dagger})(\bar{U}^{\dagger} \bar{b}_{\delta} \bar{U})$$
$$= U b_{\alpha} \bar{b}_{\beta} b_{\gamma} \bar{b}_{\delta} \bar{U}$$

の実部を取れば，

$$\mathrm{Re}\,[b_{\mu} \bar{b}_{\nu} b_{\rho} \bar{b}_{\sigma}] = \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

を用いて，

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

即ち，$\det \Lambda = 1$.

27) この表現そのものは実四元数の場合でも，複素四元数の場合でも適用できる．これを Pauli 表現と呼ぶ理由はもちろん Pauli 行列が現れるからだが，Pauli は電子のスピンに関する有名な論文
W. Pauli, ‘Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons’, Zeitschrift für Physik, **43**(1927), pp.601-623.
の脚注において，Pauli 行列が四元数の表現であることを述べている (P. Jordan に感謝しながら).

第 5 章

四元数 Dirac 理論

2 成分四元数スピノル (四元数 Dirac スピノル) が定義されたので，それに基づき四元数 Dirac 方程式をかき下す．この四元数 Dirac 方程式は，古典論において既に線形な荷電共役変換に対して不変であり，質量がゼロの極限で，四元数 Dirac スピノルの四元数による右移動のもとでも不変となる．この右移動を単位四元数に制限したものが，この極限における Pauli-Gürsey 対称性に他ならない．場を量子化するため，エルミートなラグランジアンを仮定すると，運動エネルギー項に対する Pauli-Gürsey 変換が許されるためには，四元数とは可換な新しい虚数単位が必要になる．これを複素数の虚数単位 i に同定すれば，複素四元数に導かれる．この結論は，前章 5 節の結論と整合する．四元数の Pauli 表現を用いると，四元数 Dirac スピノルは 4×2 複素行列で表示され，第 1 列目を 4 成分の Dirac スピノルと同定すれば，第 2 列目はその荷電共役に比例する．その結果，4 成分スピノルでかかれた Dirac ラグランジアン，ハミルトニアン密度は任意の表示において，自動的に「反対称化」され，双一次形式もすべて「反対称化」される．さらに，ゲージ原理の簡単な説明を行い，可換なケースのゲージ・湯川相互作用も記述する．また，四元数の Pauli 表現を使わなければ，Weyl 表示での (自動的に「反対称化」された) Dirac ラグランジアンへの移行が実行できることを示し，最後に四元数変分原理についての節を設ける．

5.1 四元 Grassmann 数

第 3 章で古典的な Dirac 場は Grassmann 変数であると仮定したとき，複素 Grassmann 数を導入した．この章で述べる四元数 Dirac 理論の古典論には四元 Grassmann 数が必要である．そこで，まずその定義を思い出しておこう．

(1.21) で定義された四元数の成分 q_μ が Grassmann 数のとき，四元 Grassmann

数という．いま，q を四元 Grassmann 数とすれば，

$$q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 \equiv q_\mu e_\mu = e_\mu q_\mu, \quad q_\mu q_\nu + q_\nu q_\mu = 0 \tag{5.1a}$$

である．q_μ が複素 Grassmann 数, $q_\mu = q_\mu^{(1)} + iq_\mu^{(2)}$ ($q_\mu^{(1)}, q_\mu^{(2)}$ は実 Grassmann 数) の場合，q を四元複素 Grassmann 数と呼ぶ．虚数単位 i は四元数と可換である．

いま，q, p を四元 Grassmann 数とすれば，

$$\mathrm{Re}\,[qp] = \mathrm{Re}\,[\overline{qp}] = -\mathrm{Re}\,[\bar{p}\,\bar{q}] = -\mathrm{Re}\,[pq]$$

$$N(q) = |q|^2 = q\bar{q} = e_i(q_iq_0 - q_0q_i) - e_{ijk}q_iq_je_k, \quad \mathrm{Re}\,[|q|^2] = 0 \tag{5.1b}$$

である．四元数行列あるいは四元数演算子 q のエルミート共役は

$$q^\dagger = e_0q_0^\dagger - e_1q_1^\dagger - e_2q_2^\dagger - e_3q_3^\dagger \tag{5.1c}$$

で定義される．ただし，$q_\mu^\dagger$ は q_μ のエルミート共役である．すると，

$$(qp)^\dagger = p^\dagger q^\dagger \tag{5.1d}$$

が成り立つ．これは四元数の成分が Grassmann 数のときにも有効である．

5.2　四元数 Dirac 方程式

前章第 4 節で証明した群の同型 $Spin(2,\mathbb{H})/Z_2 \cong L_+^\uparrow$ に基づくスピノル解析により，次の変換則に従う四元数 Dirac スピノル場を考えることができる．

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \zeta^1(x) \\ \zeta^2(x) \end{pmatrix}, \quad \zeta^1(x), \zeta^2(x) \in \mathbb{H},$$

$$\Psi'(x') = \mathsf{A}\Psi(x), \quad x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, \quad \mathsf{A} = \mathsf{A}(\Lambda) \in Spin(2,\mathbb{H}) \tag{5.2}$$

スピンと統計の関係から,《古典場》を考える場合は $\Psi(x)$ を四元 Grassmann 変数とする．

$$\Psi(x) = e_\mu \Psi_\mu(x), \quad \Psi_\mu(x)\Psi_\nu(y) + \Psi_\nu(y)\Psi_\mu(x) = 0 \qquad \text{(各成分毎に)} \tag{5.3}$$

スピノル Ψ の各成分は Klein-Gordon 方程式を満足する．

$$(\Box - m^2)\Psi = 0$$

この方程式は次の四元数 Dirac 方程式から得られる[1)].

$$\tilde{\Gamma}^\mu \partial_\mu \Psi - m\sigma_3 \Psi e_3 = 0, \quad \tilde{\Gamma}^\mu = \eta^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}_\nu \tag{5.4a}$$

ただし，行列 $\tilde{\Gamma}^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は (4.19b)，(4.25b) で定義されている．それを再録すると，

$$\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_i = -\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ -e_i & 0 \end{pmatrix} \ (i = 1, 2, 3) \tag{5.4b}$$

のようになる．$\Gamma^\mu, \tilde{\Gamma}^\mu$ の満たす関係式 (4.39) を思い出して，方程式 (5.4a) に左から行列偏微分演算子 $\Gamma^\nu \partial_\nu$ を作用させると[2)],

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu \partial_\nu \tilde{\Gamma}^\mu \partial_\mu \Psi - m\Gamma^\nu \partial_\nu \sigma_3 \Psi e_3 &= \frac{1}{2}(\Gamma^\nu \tilde{\Gamma}^\mu + \Gamma^\mu \tilde{\Gamma}^\nu)\partial_\mu \partial_\nu \Psi - m\sigma_3 \tilde{\Gamma}^\nu \partial_\nu \Psi e_3 \\ &= -\Box \Psi - (m\sigma_3)(m\sigma_3 \Psi e_3)e_3 = (-\Box + m^2)\Psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る．上式 3 番目の等式を得るのに，$\sigma_3 \tilde{\Gamma}^\nu = \Gamma^\nu \sigma_3$ の他，質量項の右側にある Hamilton の虚数単位 e_3 が重要な役割を果たしていることに注意されたい (e_1, e_2 でもよい).

四元数 Dirac 方程式 (5.4a) は次の対称性をもつ.

1. Poincaré 不変性
   これは構成からして明らかであるが，Lorentz 変換 (5.2)，(4.38) 及び $\sigma_3 \mathsf{A} = \mathsf{A}^{\dagger\,-1}\sigma_3$ に注意する.
2. 位相不変性
   (5.4a) は位相変換 $\Psi(x) \to \Psi'(x) = \Psi(x)e^{\alpha e_3}$ のもとで不変である．ただし，パラメータ α は定数.
3. P 不変性
   空間反転を $\Psi(x) \to \Psi'(x_P) = \sigma_3 \Psi(x)$ で定義すれば，(5.4a) は P 不変.
4. C 不変性
   荷電共役変換を $\Psi(x) \to \Psi^c(x) = \varpi \Psi(x) e_1$ で定義すれば，(5.4a) は C 不変.
5. T 不変性

時間反転を $\Psi(x) \to \Psi'(x_T) = \sigma_3\Psi(x)e_2$ で定義すれば，(5.4a) は T 不変.

なお，上記 P, C, T 変換における位相因子の自由度は ± 1 だけである．上の選択は，後に 4 成分表示に移ったとき，第 3 章で議論した離散変換に現れる位相因子 η_P, η_C, η_T がすべて+1 になるようにした結果である．この中で，C-変換が古典論において既に Ψ について線形であることに注意されたい．4 成分形式では，古典論で反線形な C-変換を使用する: $\psi \to \psi^c = \eta_C C\overline{\psi}^T$ (C は荷電共役行列で，$|\eta_C| = 1$)．その結果，量子論へ行くと，C-変換は線形になるが，場の演算子の順序は変わるので，もとの場の演算子の順序に戻す処方箋が必要になる[3)]．古典論で既に線形な C-変換は，量子論においてももちろん線形で，場の演算子の順序を変える必要がなくなる．これは，四元数定式化の一つの特徴である．

さらに，零質量 $(m = 0)$ の場合には，次の対称性ももつ．

6. カイラル不変性

   (5.4a) で $m = 0$ とおくと，定数のパラメータ β をもつカイラル変換 $\Psi \to e^{\beta\varpi}\Psi$ のもとで不変．この変換がカイラル変換になっていることはのちに証明する．

7. Pauli-Gürsey 対称性

   (5.4a) で $m = 0$ とおくと，任意の四元数 q によるスピノルの右移動 $\Psi \to \Psi q$ のもとで不変．四元数 q を $SL(1, \mathbb{H})$ の元に制限した場合のこの対称性が Pauli-Gürsey の $SU(2)$ 対称性[4)]に等価であることはのちに証明する．従って，変換 $\Psi(x) \to \Psi(x)q$, $q \in SL(1, \mathbb{H})$ を単に Pauli-Gürsey 変換と呼ぶ．この変換の存在は四元数 Dirac ラグランジアンの構成において，自明でない結果をもたらす．

5.3　四元数 Dirac ラグランジアン

量子化のため，四元数 Dirac 方程式 (5.4a) を最小作用の原理から導くラグランジアンを求める．最初に Lorentz 不変性と位相不変性を持ち，$m = 0$ のときに生ずる Pauli-Gürsey 対称性を許す次のようなラグランジアンを考えよう．

$$\mathcal{L}''_D = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi - m\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3\right] \tag{5.5a}$$

このラグランジアンはエルミートでないが，当面それには目をつぶって，実際変分を取る．その際 $\delta\Psi$ と $\delta\Psi^\dagger$ が独立でないことに注意して[5)]，

$$\delta\mathcal{L}''_D = \mathrm{Re}\left[\delta\Psi^\dagger \mathsf{Q} - \mathsf{Q}^\dagger\delta\Psi\right] + (\text{全微分項}) = 2\mathrm{Re}\left[\delta\Psi^\dagger\mathsf{Q}\right] + (\text{全微分項})$$

ただし，$\mathsf{Q} \equiv \tilde{\Gamma}^\mu\partial_\mu\Psi - m\sigma_3\Psi e_3$ を得る．上の第 2 式への移行は，$\Psi^\dagger = (\overline{\zeta^1}, \overline{\zeta^2})$ であること，および，Grassmann 四元数 q, p に対しては，$\mathrm{Re}\,[qp] = \mathrm{Re}\,[\overline{qp}] = -\,\mathrm{Re}\,[\bar{p}\bar{q}]$ となることに注意すればよい．その結果，最小作用の原理 $\delta\displaystyle\int\mathcal{L}''_D = 0$ から，(5.4a) が導かれる．

ところで，(5.5a) では，(3.32a) と違って，そもそも質量項がエルミートでない．エルミートな質量項 $m\,\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_3\Psi] = -m\,\mathrm{Re}\,[e_3\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3]$ は Ψ (の各成分) が Grassmann 変数なので，恒等的にゼロになる[6)]．ゼロになる質量項も形式上残したエルミートなラグランジアンは

$$\mathcal{L}'_D = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi e_3 - me_3\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3\right] \tag{5.5b}$$

である．すると今度は $m = 0$ の極限で Dirac 方程式 (5.4a) が持っていた Pauli-Gürsey 対称性が，ラグランジアン・レベルで消滅する．それでは，$\Psi(x)$ を Dirac スピノル $\psi(x)$ と結びつけることはできない．なぜなら，Pauli-Gürsey 対称性は Dirac ラグランジアンの運動エネルギー項が持つ対称性であることがわかっているからである (Pauli-Gürsey 対称性については，5.6 節で簡単な解説をする)．従って，四元数 Dirac 理論が普通の Dirac 理論と対応するには，運動エネルギー項に対する Pauli-Gürsey 対称性が，ラグランジアン・レベルで消えるのを避ける必要がある．そのためには，(5.5b) の第 1 項にある e_3 を任意の四元数と可換な虚数単位におきかえねばならない．この新たな虚数単位を，4.5 節と同じように，複素数の虚数単位 i に同定する．するとこのとき，四元数 Dirac 方程式 (5.4a) を導くには，質量項にある e_3 のうち 1 つを同じ i におき換えるべきことが要求される．このようにして，エルミートな四元数 Dirac ラグランジアンは，今や恒等的にはゼロでない質量項を持った

$$\mathcal{L}_D = i\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi - m\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3\right] \tag{5.5c}$$

となり, 最小作用の原理 $\int d^4x\,\delta\mathcal{L}_D = 0$ から $\mathsf{Q} = 0$, つまり, 四元数 Dirac 方程式 (5.4a) を得る.

このようにして, 5.2 節で述べた四元数 Dirac 方程式 (5.4a) の性質 7. (Pauli-Gürsey 変換の存在) がラグランジアン形式においても維持されるべしとの要請から, Hamilton の虚数単位とは可換な虚数単位の存在が結論された. この結論は 4.5 節の結論と符合する.

ハミルトニアンを求めるため, 一般化運動量を

$$\Pi^\dagger = \mathcal{L}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\dot{\Psi}} = \frac{i}{2}\Psi^\dagger, \quad \Pi = \frac{\partial}{\partial\dot{\Psi}^\dagger}\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\Psi$$

で定義する. ここで, 右微分と左微分を使ったのは, $\Pi^\dagger$ を Π のエルミート共役にするため. このとき, ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathrm{Re}\left[\Pi^\dagger\dot{\Psi} + \dot{\Psi}^\dagger\Pi\right] - \mathcal{L}\\ &= -i\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^i\overleftrightarrow{\partial}_i\Psi - m\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3\right]\end{aligned} \tag{5.6}$$

で, ハミルトニアンはこの空間積分で与えられる.

5.4　正準量子化

次に正準量子化のため, (4.66b) で使った射影演算子

$$E_\pm = \frac{1}{2}(e_0 \pm ie_3) \tag{5.7a}$$

を利用する. これらの射影演算子は次式を満足する.

$$\begin{cases} E_\pm^* = E_\mp, \quad E_\pm^\dagger = E_\pm, \quad e_3E_\pm = E_\pm e_3 = \mp iE_\pm \\ E_\pm^2 = E_\pm, \quad E_+E_- = E_-E_+ = 0 \end{cases} \tag{5.7b}$$

定義により, $E_+ + E_- = e_0$ は $\mathbb{H}$ の単位元なので, 四元数 Dirac スピノルに対する次の分解を得る.

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_-, \quad \Psi_\pm \equiv \Psi E_\pm \tag{5.8a}$$

ここで, スピノル $\Psi_\pm$ は四元複素 Grassmann 数である ($\Psi_+^* = \Psi_-$). このことから, Ψ_+ と Ψ_- を独立に取り扱ってよいことがわかる[7]. (5.8a) の分解を使

えば，四元数 Dirac ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- \tag{5.8b}$$

$$\mathcal{L}_\pm = i\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi_\pm^\dagger \tilde{\Gamma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi_\pm \pm im\Psi_\pm^\dagger \sigma_3 \Psi_\pm\right], \quad \Psi_\pm^\dagger \equiv (\Psi_\pm)^\dagger = E_\pm \Psi^\dagger \tag{5.8c}$$

とかける．荷電共役変換のもとでの不変性 $\mathcal{L}^c = \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}_+^c = \mathcal{L}_-, \mathcal{L}_-^c = \mathcal{L}_+$ で保証される．このことは，分解 (5.8) が (3.45) で与えられる荷電共役変換のもとで明白な不変性を持つ Dirac ラグランジアンに対応していることを示す．

成分 $\Psi_\pm$ は四元数 Dirac 方程式 (5.4a) を満足するので，その平面波解

$$\Psi_+(x) = \sum_{r=\pm} \int_{\boldsymbol{p}} [\mathsf{U}_+^{(r)}(p) a(\boldsymbol{p}, r) e^{ipx} + \mathsf{V}_+^{(r)}(p) b^\dagger(\boldsymbol{p}, r) e^{-ipx}] \tag{5.9a}$$

$$\Psi_-(x) = \sum_{r=\pm} \int_{\boldsymbol{p}} [\mathsf{U}_-^{(r)}(p) a^\dagger(\boldsymbol{p}, r) e^{-ipx} + \mathsf{V}_-^{(r)}(p) b(\boldsymbol{p}, r) e^{ipx}] \tag{5.9b}$$

を考える (ただし，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$)．スピンと統計の関係を満たすように場 $\Psi_+(x)$ を量子化すれば，粒子・反粒子に対する消滅・生成演算子に格上げされる，$a(\boldsymbol{p}, r), a^\dagger(\boldsymbol{p}, r), b(\boldsymbol{p}, r), b^\dagger(\boldsymbol{p}, r)$ は反交換関係 (3.69) に従う．四元数 Dirac スピノル $\mathsf{U}_\pm^{(r)}(p) = \mathsf{U}^{(r)}(p) E_\pm, \mathsf{V}_\pm^{(r)}(p) = \mathsf{V}^{(r)}(p) E_\pm$ は Dirac 方程式

$$(\tilde{\Gamma}^\mu p_\mu + m\sigma_3)\mathsf{U}_\pm^{(r)}(p) = 0, \quad (\tilde{\Gamma}^\mu p_\mu - m\sigma_3)\mathsf{V}_\pm^{(r)}(p) = 0 \tag{5.10}$$

を満たす．これから，$p^2 + m^2 = 0, p^0 = \pm E(\boldsymbol{p}), E(\boldsymbol{p}) \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ が導かれる．(5.10) は固有値方程式になっている:

$$h(\boldsymbol{p})\mathsf{U}_\pm^{(r)}(p) = E(\boldsymbol{p})\mathsf{U}_\pm^{(r)}(p), \quad h(-\boldsymbol{p})\mathsf{V}_\pm^{(r)}(p) = -E(\boldsymbol{p})\mathsf{V}_\pm^{(r)}(p),$$

$$h(\boldsymbol{p}) = \tilde{\Gamma} \cdot \boldsymbol{p} + m\sigma_3 = h^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{5.11}$$

添え字 r が 2 つの値しかとらないことは次のようにして確かめられる．いま，《ヘリシティ演算子》(の 2 倍)

$$s(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{p}}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2}}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3), \quad \Lambda^i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & e_i \end{pmatrix}$$

$$s^\dagger(\boldsymbol{p}) = -s(\boldsymbol{p}), \quad s^2(\boldsymbol{p}) = -\mathbf{1}_2 \tag{5.12}$$

を定義すると，これは $h(\boldsymbol{p})$ と交換する．

$$[s(\boldsymbol{p}), h(\boldsymbol{p})] = 0$$

それ故，$h(\boldsymbol{p})$ と $s(\boldsymbol{p})$ の同時固有関数を $\mathsf{U}_{\pm}^{(r)}(p), \mathsf{V}_{\pm}^{(r)}(p)$ とした．従って，添え字 r は $s(\boldsymbol{p})$ の固有値を区別する．ところで，いま，$\Psi_{+}(x)$ が四元数 Dirac 方程式 (5.4a) の解であれば，$\Psi_{+}(x)e^{\alpha e_3}$ も解である．そこで，

$$s(\boldsymbol{p})\mathsf{U}_{\pm}^{(r)}(p) = \mathsf{U}_{\pm}^{(r)}(p)e^{\alpha e_3}$$
$$s(\boldsymbol{p})\mathsf{V}_{\pm}^{(r)}(p) = \mathsf{V}_{\pm}^{(r)}(p)e^{\alpha e_3}$$

とおいて，$s^2(\boldsymbol{p}) = -\mathbf{1}_2$ を考慮すると，$e^{2\alpha e_3} = -1$，従って，$\alpha = \pm\pi/2$，すなわち，$e^{\alpha e_3} = \pm e_3$ を得る．こうして，ヘリシティの固有状態は

$$s(\boldsymbol{p})\mathsf{U}_{+}^{(\pm)}(p) = \pm\mathsf{U}_{+}^{(\pm)}(p)e_3,$$
$$s(\boldsymbol{p})\mathsf{V}_{+}^{(\pm)}(p) = \mp\mathsf{V}_{+}^{(\pm)}(p)e_3 \tag{5.13}$$

を満足する．これらから四元数スピノルの規格直交条件

$$\mathrm{Re}\,[\mathsf{U}^{(r)}{}^{\dagger}_{\pm}(p)\mathsf{U}_{\pm}^{(s)}(p)] = E(\boldsymbol{p})\delta_{rs}, \quad \mathrm{Re}\,[\mathsf{V}_{\pm}^{(r)}{}^{\dagger}(p)\mathsf{V}_{\pm}^{(s)}(p)] = E(\boldsymbol{p})\delta_{rs}, \tag{5.14a}$$

$$\mathrm{Re}\,[\mathsf{U}_{\pm}^{(r)}{}^{\dagger}(p)\mathsf{V}_{\pm}^{(s)}(-p)] = \mathrm{Re}\,[\mathsf{V}_{\pm}^{(r)}{}^{\dagger}(-p)\mathsf{U}_{\pm}^{(s)}(p)] = 0,\ \mathsf{V}_{\pm}^{(s)}(-p) \equiv \mathsf{V}_{\pm}^{(s)}(p^0, -\boldsymbol{p}) \tag{5.14b}$$

を得る．完全性条件は次のようになる．

$$\sum_{r=\pm}\mathsf{U}_{\pm}^{(r)}(p)\mathsf{U}_{\pm}^{(r)}{}^{\dagger}(p) = -\Gamma^{\mu}p_{\mu} + m\sigma_3, \quad \sum_{r=\pm}\mathsf{V}_{\pm}^{(r)}(p)\mathsf{V}^{(r)}{}^{\dagger}_{\pm}(p) = -\Gamma^{\mu}p_{\mu} - m\sigma_3 \tag{5.15}$$

同時刻正準反交換関係を生成・消滅演算子の間の反交換関係から，いつものように，完全性条件を用いて，次のように計算する ($p'_0 = p_0$，$x^{0\prime} = x^0 = t$).

$$\mathrm{Re}\left\{\Psi_{+,\alpha}(\boldsymbol{x}, t), \Psi^{\dagger}_{+,\beta}(\boldsymbol{x}', t))\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=\pm}\int_{\boldsymbol{p}'}\left[\mathsf{U}_{+,\alpha}^{(r)}(p)\mathsf{U}^{(s)}{}^{\dagger}_{+,\beta}(p')\left\{a(\boldsymbol{p}, r), a^{\dagger}(\boldsymbol{p}', s)\right\}e^{i(px-p'x')}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathsf{V}_{+,\alpha}^{(r)}(p)\mathsf{V}^{(s)}{}^{\dagger}_{+,\beta}(p')\{b^{\dagger}(\boldsymbol{p}, r), b(\boldsymbol{p}', s)\}e^{-i(px-p'x')}\right]\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}\left[\mathsf{U}_{+,\alpha}^{(r)}(p)\mathsf{U}^{(r)}{}^{\dagger}_{+,\beta}(p)e^{ip(x-x')} + \mathsf{V}_{+,\alpha}^{(r)}(p)\mathsf{V}^{(r)}{}^{\dagger}_{+,\beta}(p)e^{-ip(x-x')}\right]\right]$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{5.16}$$

ここで，$\mathrm{Re}\,[qp] = \mathrm{Re}\,[pq]$, $q, p \in \mathbb{H}^c$ を使った．他も同様.

(5.9) から四元数 Dirac 方程式 (5.4a) の平面波解は，

$$\Psi(x) = \sum_{r=\pm} \int_{\boldsymbol{p}} [\mathsf{U}^{(r)}(p) A(\boldsymbol{p}, r) e^{-(px)e_3} + \mathsf{V}^{(r)}(p) \bar{B}(\boldsymbol{p}, r) e^{(px)e_3}], \tag{5.17}$$

とかける．ここで，A, B は $\mathbb{C}(1, e_3)$ 上で定義される．

$$A = \alpha_r - \alpha_i e_3, \quad B = \beta_r - \beta_i e_3. \tag{5.18a}$$

関係式 $e_3 E_\pm = \mp i E_\pm$ を使うと，

$$(A, \bar{A}, B, \bar{B})E_+ = E_+(a, a^\dagger, b, b^\dagger), \quad (A, \bar{A}, B, \bar{B})E_- = E_-(a^\dagger, a, b^\dagger, b),$$
$$a \equiv \alpha_r + i\alpha_i, \quad a^\dagger \equiv \alpha_r - i\alpha_i, \quad b \equiv \beta_r + i\beta_i, \quad b^\dagger \equiv \beta_r - i\beta_i. \tag{5.18b}$$

それ故，粒子・反粒子の生成・消滅演算子の反交換関係 (3.69) は次式にまとめられる．

$$\{A(\boldsymbol{p}, r), \bar{A}(\boldsymbol{p}', s)\} = \{B(\boldsymbol{p}, r), \bar{B}(\boldsymbol{p}', s)\} = (2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\delta_{rs},$$
$$\text{他の反交換関係} = 0 \tag{5.18c}$$

5.5 ゲージ原理

ここまでは自由場の量子論に的を絞ってきた．Lorentz 不変性は相対論的場の量子論におけるあらゆる相互作用の在り方を決めるが，相互作用の具体的形まで決めるわけではない． Lorentz 不変性は自由場の理論だけでなく，すべての相互作用が満たす対称性だからである．ところが，自由場の理論の持っている大域的な内部または外部対称性[8]を局所対称性に拡張することによって，相互作用の型を決めることができる．この節では，Yang-Mills によるこの**ゲージ原理**[9]に基づく相互作用の導入法について，最初に複素 Dirac 場について，ついで四元数 Dirac スピノル場について簡単な例を述べる[10]．ただし，可換な内部対称性に関するものに限る．外部対称性に関する例は次章で調べる．非可換な場合は，第 7, 8 章で四元数・八元数に関係する特殊例を議論する．

一般に自由な複素場の理論は位相変換のもとで不変である (この不変性を保持

する相互作用が存在する)．これを理論は大域的 $U(1)$ 不変性を持つといい，(一般化された) $U(1)$ 電荷の保存則に導く．Dirac 場の位相変換は (3.36a) で与えられ，保存する Noether 流 J^μ はラグランジアン (3.32b) にもとづけば (3.36b), (3.45) にもとづけば (3.46) で与えられる．この大域的位相変換を局所化 (つまり，定数のパラメータ α を位置に依存するパラメータ $\alpha(x)$ に一般化)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \tag{5.19a}$$

すれば，Dirac ラグランジアン (3.32b) または (3.45) は

$$\mathcal{L}_D(x) \to \mathcal{L}'_D(x) = \mathcal{L}_D(x) + J^\mu(x)\partial_\mu\alpha(x) \tag{5.19b}$$

と変化する．ところがこの変化は，Maxwell の理論により，A_μ を電磁ポテンシャルとしたとき，Dirac 場と電磁場の相互作用を記述するラグランジアンの中の

$$J^\mu(x)A_\mu(x) \tag{5.19c}$$

という項がゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \tag{5.19d}$$

の結果変化する項を丁度相殺する．このような場 A_μ を**ゲージ場**という[11)]．この変換則から，A_μ は実場でなければならない．このゲージ変換のもとで，電磁場テンソルと呼ばれる反対称 2 階テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.19e}$$

は不変である．従って，

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_D(x) + J^\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{L}_B(x) \tag{5.19f}$$

$$\mathcal{L}_B(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \tag{5.19g}$$

はゲージ変換 (5.19a), (5.19d) のもとで不変である．このようにして相互作用 (5.19c) を導入する方法を $U(1)$ ゲージ理論，あるいは，自由場の理論の持つ大域的 $U(1)$ 対称性の**ゲージ化**という．(5.19f) 右辺第 2 項の相互作用項は自由な Dirac ラグランジアン (3.32b) あるいは (3.45) における微分演算子を**共変微分**に変えるおき換え

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x) \tag{5.19h}$$

によって生まれる．これをゲージ理論の**微分形式**と呼ぶ．このとき，電磁場の強さは，

$$F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu] \tag{5.19i}$$

で与えられる．

複素場としての Dirac 場の位相変換は，四元数 Dirac スピノル場に対しては，5.2 節 2.の位相変換になる．それを局所化

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \Psi(x)e^{\alpha(x)e_3} \tag{5.20a}$$

すると，四元数 Dirac ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_D \to \mathcal{L}_D + i\mathrm{Re}\left[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\Psi e_3\right]\partial_\mu\alpha(x) \tag{5.20b}$$

と変化する．この変化を打ち消すために，(5.19d) に従って変換するゲージ場 A_μ を導入して，ゲージ不変な四元数 Dirac ラグランジアン

$$\mathcal{L}_1 = i\mathrm{Re}\left[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \Psi e_3 A_\mu) - m\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3\right] = \mathcal{L}_D + J^\mu A_\mu \tag{5.20c}$$

を得る．ここで，ベクトル・カレント (V) を

$$J^\mu = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\Psi e_3] \tag{5.20d}$$

と定義した．

次に，5.2 節 6.のカイラル変換を局所化

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{\beta(x)\varpi}\Psi(x) \tag{5.21a}$$

すると，変換則

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) - \partial_\mu\beta(x) \tag{5.21b}$$

に従うカイラル・ゲージ場 B_μ が存在して，ゲージ不変な四元数 Dirac ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_2 = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + \varpi B_\mu)\Psi] \tag{5.21c}$$

となる．従って，$U(1)$ カイラル・ゲージ相互作用は，

$$\mathcal{L}_{2,\,\mathrm{int}} = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\varpi\Psi]B_\mu = J_5^\mu B_\mu \tag{5.21d}$$

で与えられる．ここで，擬ベクトル・カレント (A) を

$$J_5^\mu = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\varpi\Psi] \tag{5.21e}$$

と定義した．

スカラー (S)・擬スカラー (P)・テンソル (T) 双一次形式を定義して，ベクトル・カレント，擬ベクトル・カレントと合わせ整理すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{S}) \quad J = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3]\\
&(\mathrm{P}) \quad J_5 = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_1\Psi e_3]\\
&(\mathrm{V}) \quad J^\mu = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\Psi e_3]\\
&(\mathrm{A}) \quad J_5^\mu = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\varpi\Psi]\\
&(\mathrm{T}) \quad J^{\mu\nu} = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Sigma}^{\mu\nu}\sigma_3\Psi]
\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{\Sigma}^{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}(\tilde{\Gamma}^\mu\Gamma^\nu - \tilde{\Gamma}^\nu\Gamma^\mu)$．これらはすべてエルミートに選んだ．この性質は，(S), (P), (V), (A) に対しては，明白であるが，(T) に対しては，$\sigma_3\tilde{\Sigma}^{\mu\nu\dagger} = \sigma_3(1/2)(\Gamma^\nu\tilde{\Gamma}^\mu - \Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^\nu) = -(1/2)(\tilde{\Gamma}^\mu\Gamma^\nu - \tilde{\Gamma}^\nu\Gamma^\mu)\sigma_3 = -\tilde{\Sigma}^{\mu\nu}\sigma_3$ に注意すればよい．上の双一次形式の C-parity は Ψ の荷電共役変換 $\Psi \to \Psi^c = \varpi\Psi e_1$ を使えば，

表 6　双 1 次形式の C-parity

双一次形式	S	P	V	A	T
C parity	+1	+1	−1	+1	−1

となることが容易にわかる．たとえば，スカラー・カレントについて言えば，

$$\begin{aligned}
J = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3] \to J^c &= i\mathrm{Re}\,[\Psi^{c\dagger}\sigma_3\Psi^c e_3] = i\mathrm{Re}\,[(\varpi\Psi e_1)^\dagger\sigma_3(\varpi\Psi e_1)e_3]\\
&= i\mathrm{Re}\,[-e_1\Psi^\dagger\varpi^\dagger\sigma_3\varpi\Psi(-e_3e_1)] = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3]\\
&= +J
\end{aligned}$$

となる．なお，(S), (P), (V), (A), (T) いずれもゲージ不変 ($\Psi(x) \to \Psi(x)e^{\alpha(x)e_3}$ のもとで不変) であるが，(A), (T) だけは Pauli-Gürsey 変換のもとでも不変である．

Ψ_- は Ψ_+ の複素共役なので，もし Ψ_+ が内部対称群 $SU(n)$ の基本表現 $\underline{n}$ に属すならば，Ψ_- はその共役表現 $\underline{n}^*$ に属す．いま，そのような仮定のもとで，$SU(n)$ ゲージ理論を考えると，四元数 Dirac スピノル場の変換は

$$\Psi'_+(x) = g^{-1}\Psi_+(x), \quad \Psi'_-(x) = g^{*\,-1}\Psi_-(x), \quad g \in SU(n), \tag{5.22a}$$

となり，$T_A(A = 1, 2, \cdots, n^2-1)$ を $SU(n)$ のエルミートな生成子として，ゲージ不変な四元数 Dirac ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 = i\mathrm{Re}\,[&\Psi_+^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu - iT_AG_\mu^A)\Psi_+ - m\Psi_+^\dagger\sigma_3\Psi_+e_3 \\ &+ \Psi_-^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + iT_A^*G_\mu^A)\Psi_- - m\Psi_-^\dagger\sigma_3\Psi_-e_3],\end{aligned} \tag{5.22b}$$

$$T_AG_\mu^A(x) \to T_A{G_\mu}'^A(x) = g^{-1}(x)T_AG_\mu^A(x)g(x) + ig^{-1}(x)\partial_\mu g(x). \tag{5.22c}$$

となる．従って，$SU(n)$ ゲージ相互作用は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{3,\mathrm{int}} &= J_A^\mu G_\mu^A \\ J_A^\mu &= \mathrm{Re}\,[\Psi_+^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A\Psi_+ - \Psi_-^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A^*\Psi_-] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(T_A - T_A^*)\Psi] + \frac{i}{2}\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(T_A + T_A^*)\Psi e_3]\end{aligned} \tag{5.22d}$$

で与えられる．

$A = 0$ で $T_0 = 1$ とすれば第 2 項のみが生き残って，J_0^μ は (5.20d) に一致する．

5.6 4 成分形式 (Pauli 表示)

この節では，四元数の Pauli 表現 (4.60a,c) を用いて，(量子化された) 四元数 Dirac 理論の 4 成分形式への移行を調べる．次節で，四元数の行列表現に頼らない移行の方法を説明する．

まず，四元数 Dirac スピノルの Pauli 表現は次のようになる．

$$\rho(\Psi) = (S^{-1}\psi, \varOmega S^{*\,-1}\psi^*), \quad \rho(\Psi^\dagger) = \begin{pmatrix} \psi^\dagger S \\ -\psi^T S^* \varOmega \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

ただし，行列 $\varOmega$ は (2.21b) の行列 ϖ を用いて，

$$\varOmega = \begin{pmatrix} \varpi & 0_2 \\ 0_2 & \varpi \end{pmatrix} = -\varOmega^T = -\varOmega^\dagger \tag{5.24}$$

で定義される．ここで，$\rho(\Psi)$ 及び $\rho(\Psi^\dagger)$ は 4×2 及び $2\times$ 4 行列で，$\zeta^a = e_0\zeta_0^a + e_1\zeta_1^a + e_2\zeta_2^a + e_3\zeta_3^a$ $(a=1,2)$ とおいて，

$$S^{-1}\psi = \begin{pmatrix} \zeta_0^1 - i\zeta_3^1 \\ -i\zeta_1^1 + \zeta_2^1 \\ \zeta_0^2 - i\zeta_3^2 \\ -i\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \end{pmatrix}, \quad S^{*\,-1}\psi^* = \begin{pmatrix} \zeta_0^1 + i\zeta_3^1 \\ +i\zeta_1^1 + \zeta_2^1 \\ \zeta_0^2 + i\zeta_3^2 \\ +i\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

で与えられ，S は任意の 4×4 ユニタリ行列である．すると，(5.25) の ψ は任意の表示における 4 成分 Dirac スピノルを定義する．平面波展開 (5.9) は

$$S\rho(\Psi_+(x)) = \psi(x) = \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}} [a(\boldsymbol{p},r)u^{(r)}(p)e^{ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p},r)v^{(r)}(p)e^{-ipx}] \tag{5.26a}$$

$$\begin{aligned} S\rho(\Psi_-(x)) &= \gamma_5\psi^c(x) \\ &= \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}} [a(\boldsymbol{p},r)(\gamma_5 C\overline{u}^{(r)\,T}(p))e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p},r)(\gamma_5 C\overline{v}^{(r)\,T}(p))e^{ipx}] \end{aligned} \tag{5.26b}$$

となり，平面波展開 (3.54a), (3.57c) を表す．ここで，$\rho(\mathsf{U}_+^{(r)}) = u^{(r)}(p)$, $\rho(\mathsf{V}_+^{(r)}) = v^{(r)}(p), \rho(\mathsf{U}_-^{(r)}) = \gamma_5 C\overline{u}^{(r)\,T}(p)$, $\rho(\mathsf{V}_-^{(r)}) = \gamma_5 C\overline{v}^{(r)\,T}(p)$ $(r=\pm)$ を使った．この関係式は付録 C で証明する．

(5.26) は任意の表示で成り立つが，この節では，簡単のため，$S = 1_4$ とおいて計算を進める．結果が表示 (S の選択) に依らないことは明らかである．いま，Dirac のガンマ行列を次式で定義する：

$$\rho(\tilde{\Gamma}^\mu) = -\gamma^0\gamma^\mu \tag{5.27a}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i1_2 & 0_2 \\ 0_2 & i1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^i = \sigma_i \tag{5.27b}$$

すると，

$$\rho(\Gamma^\mu) = -\gamma^\mu \gamma^0 \tag{5.27c}$$

となるので，(4.39) は Dirac 代数

$$-\rho(\Gamma^\mu \tilde{\Gamma}^\nu + \Gamma^\nu \tilde{\Gamma}^\mu) = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta_{\mu\nu}\rho(1_2) = 2\eta_{\mu\nu}1_4 \tag{5.28}$$

になる．ガンマ行列に対する表示 (5.27b) を以下 Dirac 行列の Pauli 表示と呼ぶことにする．Weyl 表示のガンマ行列 (2.36) とは次のユニタリ変換で関係している[12)]．

$$\gamma_W^\mu = \begin{pmatrix} 0_2 & i\sigma^\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu & 0_2 \end{pmatrix} = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_2 & -i1_2 \\ 1_2 & i1_2 \end{pmatrix} \tag{5.29a}$$

$$\gamma_W^5 = -i\gamma_W^0 \gamma_W^1 \gamma_W^2 \gamma_W^3 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0_2 \\ 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} = S\gamma_5 S^{-1} \tag{5.29b}$$

Pauli 表示では，γ_5 と荷電共役行列 C は次のようになる：

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0_2 & i1_2 \\ -i1_2 & 0_2 \end{pmatrix} = -i\rho(\varpi), \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = 1, \tag{5.30a}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad C^2 = 1,\ C^\dagger C = 1,\ C^{-1} = C, \tag{5.30b}$$

$$\left.\begin{array}{l} C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu\,T} \\ C^T = -C \end{array}\right\} \quad (\text{表示によらない}) \tag{5.30c}$$

$$\gamma_5 C(i\gamma^0)^T = \begin{pmatrix} 0_2 & i1_2 \\ -i1_2 & 0_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & 0_2 \\ 0_2 & \varpi \end{pmatrix} = \Omega \tag{5.30d}$$

従って，$\Omega\psi^* = \gamma_5 C\overline{\psi}^T$ $(S = 1_4)$ を得るので，荷電共役スピノル (3.30c) を用いて，

$$\rho(\Psi) = (\psi, \gamma_5\psi^c), \tag{5.31a}$$

$$\rho(\Psi^c) = \rho(\varpi\Psi e_1) = i\gamma_5(-i\gamma_5\psi^c, -i\psi) = (\psi^c, \gamma_5\psi) \tag{5.31b}$$

とかける．次に，四元数 Dirac 方程式 (5.4a) は

$$\rho(\tilde{\Gamma}^\mu\partial_\mu\Psi - m\sigma_3\Psi e_3) = -\gamma^0[\gamma^\mu\partial_\mu(\psi, \gamma_5 C\overline{\psi}^T) + m(\psi, -\gamma_5 C\overline{\psi}^T)] = 0$$

となって，(3.29d), (3.30a) を一挙に導く．

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0$$

また，(5.5c) の Dirac ラグランジアンは，(4.60c) を使って，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Bigg[&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi^\dagger \\ \psi^{c\,\dagger}\gamma_5\end{pmatrix}(-i)\gamma^0\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu(\psi, \gamma_5\psi^c) \\
&-im\begin{pmatrix}\psi^\dagger \\ \psi^{c\,\dagger}\gamma_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2\end{pmatrix}(-i\psi, i\gamma_5\psi^c)\Bigg] \\
= -\frac{1}{4}&[\overline{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi + \psi^T\gamma^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\overline{\psi}^T] - \frac{m}{2}(\overline{\psi}\psi - \psi^T\overline{\psi}^T) \\
= -\frac{1}{2}&[\overline{\psi}, (\frac{1}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + m)\psi]
\end{aligned} \tag{5.32a}$$

と変形されて，明白な荷電共役不変性を持つ (3.45) と一致する．一方，ハミルトニアン密度 (5.6) は次のようになる．

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}[\overline{\psi}, \gamma^i\overleftrightarrow{\partial}_i\psi] + \frac{m}{2}[\overline{\psi}, \psi] \tag{5.32b}$$

このように，ラグランジアンもハミルトニアン密度も自動的に「反対称化」された[13]．これは，5.2 節 4.の荷電共役変換が四元数 Dirac スピノル Ψ に対しては線形に作用することによる．

さらに，5.2 節で述べた四元数 Dirac 方程式 (5.4a) (あるいは四元数 Dirac ラグランジアン (5.5c)) のもつ対称性 (不変性) は 4 成分形式 (Pauli 表示) では次のようなよく知られた形をとる．

1. Poincaré 不変性

Dirac スピノル ψ の Lorentz 変換 は

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad x' = \Lambda x + a \tag{5.33a}$$

$$S(\Lambda) = \rho(\mathsf{A}) = \begin{pmatrix} \rho(Q) & -\rho(P) \\ \rho(P) & \rho(Q) \end{pmatrix} \tag{5.33b}$$

ただし，A は (4.34) で与えられる．ゆえに，$\rho(|Q|^2 - |P|^2)) = \rho(1) = \sigma_0$, $\mathrm{tr}\,\rho(\bar{Q}P) = 0$.

2. 位相不変性

位相変換は $\Psi e^{\alpha e_3} E_\pm = \Psi_\pm e^{\mp i\alpha}$ から

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x)$$

となる．

3. P 不変性

空間反転は $\rho(\Psi'(x_P)) = (\psi'(x_P), \Omega\psi'^*(x_P)) = \rho(\sigma_3)\rho(\Psi(x)) = i\gamma^0(\psi(x), \Omega\psi^*(x))$ から，

$$\psi'(x_P) = i\gamma^0\psi(x), \quad \overline{\psi}'(x_P) = i\overline{\psi}(x)\gamma^0$$

となる．これは (3.37) で $\eta_P = 1$ とおいたケースに等しい．

4. C 不変性

(5.31a,b) から荷電共役変換は $\psi \to \psi^c$, $\psi^c \to \psi$ となる[14)]．従って，(3.43) の $\eta_C = 1$ に対応する．

5. T 不変性

古典論の時間反転 $\Psi(x) \to \Psi'(x_T) = \sigma_3\Psi(x)e_2$ (ここの σ_3 は四元数行列なので，その Pauli 表現は Pauli 表示の $i\gamma^0$ に等しい，$\rho(\sigma_3) = i\gamma^0$) は $\rho(\Psi'(x_T)) = (\psi'(x_T), \Omega\psi'^*(x_T)) = \rho(\sigma_3\Psi(x)e_2) = (i\Omega\gamma^0\psi^*(x), -i\gamma^0\psi(x)) = (\gamma_5 C\psi^*(x), -i\gamma^0\psi(x))$ なので，$R = \gamma_5 C$ とおけば，

$$\psi'(x_T) = R\psi^*(x), \quad \psi'^*(x_T) = R\psi(x)$$

となる ($R^{-1}\gamma^{\mu *}R = \gamma_\mu$)．これは (3.52) で $\eta_T = 1$ とおいたものになる．量子場に対しては，時間反転の演算子を $\mathcal{T}$ とおけば，(3.91e) の $\eta_T = 1$ に対応して，

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = R^{-1}\psi(x_T), \quad \mathcal{T}\overline{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} = \overline{\psi}(x_T)R$$

となるが，これは

$$\mathcal{T}\Psi(x)\mathcal{T}^{-1} = -\sigma_3\bar{\Psi}^t(x_T)e_2$$
$$\longrightarrow \mathcal{T}\rho(\Psi(x))\mathcal{T}^{-1} = \rho(-\sigma_3\bar{\Psi}^t(x_T)e_2) = \rho(-\sigma_3)(\psi^*(x_T), \Omega\psi(x_T))\rho(e_2) \tag{5.34}$$

と仮定すれば得られる (ただし，$\bar{\Psi}^t$ は e_2 の符号を変えない四元数共役[15])．

この中で，Ψ について線形な C-変換は量子論で場の演算子の順序を変えないが，4 成分形式では，古典論で反線形な C-変換を定義するので，量子論に移ると場の演算子の順序を変えることに再度注意する．

次に，零質量 ($m=0$) の場合の対称性について．

6. カイラル対称性

カイラル変換は $\rho(\Psi') = (\psi', \Omega\psi'^*) = \rho(e^{\alpha\omega}\Psi) = (e^{i\alpha\gamma_5}\psi, e^{i\alpha\gamma_5}\Omega\psi^*)$ から

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x), \quad \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5}$$

となる．

7. Pauli-Gürsey 対称性

Pauli 表現 (4.60a) を用いて，変換 $\Psi \to \Psi' = \Psi q$ は

$$\rho(\Psi') = \rho(\Psi q) = (\psi, \gamma_5 C\overline{\psi}^T)\begin{pmatrix} q_0 - iq_3 & -iq_1 - q_2 \\ -iq_1 + q_2 & q_0 + iq_3 \end{pmatrix}$$
$$\equiv (\psi, \gamma_5 C\overline{\psi}^T)\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \because\ |q|^2 = 1 \tag{5.35a}$$

となり，Pauli-Gürsey 変換[4)]

$$\psi' = a\psi + b\gamma_5 C\overline{\psi}^T,$$
$$\overline{\psi}'^T = a^*\overline{\psi}^T - b^* C^{-1}\gamma_5\psi, \tag{5.35b}$$

に他ならない (この節の終わりにこの変換を普通の方法で導く)．

対応する保存カレント ($m=0$ の場合) を求めることは容易である．いま，局所的な無限小 Pauli-Gürsey 変換 $\delta\Psi(x) = \Psi(x)e_i\delta q_i(x)$ を考える．四元数

Dirac ラグランジアン (5.5c) の運動エネルギー項の対応する変分から

$$\delta\mathcal{L}_{m=0} = \frac{i}{2}\mathrm{Re}\,[\delta\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\delta\Psi] = J_i^\mu\partial_\mu\delta q_i$$
$$J_i^\mu \equiv i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu\Psi e_i] \tag{5.35c}$$

を得る．四元数の Pauli 表現により，

$$J_1^\mu = \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi^c + \overline{\psi}^c\gamma^\mu\gamma_5\psi],$$
$$J_2^\mu = -\frac{1}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi^c - \overline{\psi}^c\gamma^\mu\gamma_5\psi],$$
$$J_3^\mu = \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu\psi - \overline{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c] \tag{5.35d}$$

チャージ $Q_i = \int d^3\boldsymbol{x}J_i^0(x)$ は交換関係

$$\left[\frac{Q_i}{2}, \frac{Q_j}{2}\right] = -i\varepsilon_{ijk}\frac{Q_k}{2} \tag{5.35e}$$

を満たす．これは，(符号を除いて) 通常の $SU(2)$ のリー代数の交換関係と同じになる．

$SU(n)$ ゲージ相互作用のカレント (5.22d) は，ゲージ変換 (5.22a) を仮定して，局所的な無限小ゲージ変換 $\delta\Psi_+(x) = -iT_A\varepsilon^A(x)\Psi_+(x)$ と $\delta\Psi_-(x) = iT_A^*\varepsilon^A(x)\Psi_-(x)$ を考えることにより，

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\varepsilon^A)\mathrm{Re}\,[\Psi_+^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A\Psi_+ - \Psi_-^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A^*\Psi_-] = J_A^\mu(\partial_\mu\varepsilon^A)$$
$$J_A^\mu = \mathrm{Re}\,[\Psi_+^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A\Psi_+ - \Psi_-^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A^*\Psi_-]$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi_+^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A\Psi_+ - \Psi_-^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu T_A^*\Psi_-) = \frac{i}{2}[\overline{\psi}, \gamma^\mu T_A\psi]$$

のように求まる．非可換電荷 $Q_A = \int d^3\boldsymbol{x}J_A^0(x)$ の満たす交換関係は $SU(n)$ の Lie 代数である．

第 5.5 節で定義した双一次形式の Pauli 表現は次のようになる．

$$\text{(S)}\quad J = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3] = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi^\dagger\sigma_3\Psi e_3) = \frac{1}{2}[\overline{\psi}, \psi]$$
$$\text{(P)}\quad J_5 = i\mathrm{Re}\,[\Psi^\dagger\sigma_1\Psi e_3] = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi^\dagger\sigma_1\Psi e_3) = -\frac{i}{2}[\overline{\psi}, \gamma_5\psi]$$

$$(\mathrm{V})\quad J^{\mu}=i\mathrm{Re}\,[\Psi^{\dagger}\tilde{\Gamma}^{\mu}\Psi e_3]=\frac{i}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi^{\dagger}\tilde{\Gamma}^{\mu}\Psi e_3)=\frac{i}{2}[\overline{\psi},\gamma^{\mu}\psi]$$
$$(\mathrm{A})\quad J_5^{\mu}=i\mathrm{Re}\,[\Psi^{\dagger}\tilde{\Gamma}^{\mu}\varpi\Psi]=\frac{i}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi^{\dagger}\tilde{\Gamma}^{\mu}\varpi\Psi)=\frac{i}{2}[\overline{\psi},\gamma_5\gamma^{\mu}\psi]$$
$$(\mathrm{T})\quad J^{\mu\nu}=i\mathrm{Re}\,[\Psi^{\dagger}\tilde{\Sigma}^{\mu\nu}\sigma_3\Psi]=\frac{i}{2}\mathrm{tr}\,\rho(\Psi^{\dagger}\tilde{\Sigma}^{\mu\nu}\sigma_3\Psi)=\frac{i}{2}[\overline{\psi},S^{\mu\nu}\psi]$$

ここで，$S^{\mu\nu}$ は (2.38) で定義されている．このように，四元数定式化では双一次形式が Dirac スピノルに関して自動的に「反対称化」された[16]．

この節の最後に Pauli-Gürsey 変換についての短い説明を追加する．Pauli-Gürsey 変換はニュートリノの質量に関連して，Pauli が導入し (1957)，Gürsey がその群構造を明らかにした (1958)[4]．これは，零質量の Dirac ラグランジアンが持つ $SU(2)$ 対称性である．Gürsey は Dirac スピノルを 2×2 行列に組んでいるが，ここでは，四元数の方法から示唆される 2 重項の線形変換として捉え直す．(3.45) で $m=0$ とおくと，

$$\mathcal{L}_D^{m=0}=-\frac{1}{4}\sum_{r=1,2}\overline{\psi}_r\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\psi_r$$

を得る．ただし，$\psi_1=\psi,\psi_2=\gamma_5\psi^c$ とおいた．これは明らかにユニタリ変換 $\psi_r\to\psi'_r=\sum_{s=1,2}\Pi_{rs}\psi_s$, $(r=1,2)$, $\det\Pi=1$ のもとで不変である．この変換が Pauli-Gürsey 変換といわれる．

$$\Pi=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\in SU(2)$$

ただし，$|a|^2+|b|^2=1$, とおけば，Pauli-Gürsey 変換は

$$\psi'=a\psi+b\gamma_5\psi^c$$
$$\psi^{c\prime}=a^*\psi^c-b^*\gamma_5\psi$$

となる．これは，(5.35b) に一致する．この Pauli-Gürsey 変換の存在が，Dirac 理論の四元数定式化において，Hamilton の虚数単位と可換な新たな虚数単位の存在に導いたのであった．Pauli-Gürsey 変換は因子 γ_5 のため Dirac 場の同時刻反交換関係を保つ正準変換である．

5.7 ゲージ・湯川相互作用

現在の素粒子の標準模型では，素粒子の質量は Higgs 機構により生ずると仮定される．周知のように，Higgs 場はカイラル・フェルミオンと湯川結合する．この節では，ゲージ・湯川相互作用の，形式上ではあるが統一的取り扱いを試みる．今，ゲージ原理に従って，(5.5c) のラグランジアンが局所位相変換及び局所カイラル・ゲージ変換

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{\beta(x)\varpi}\Psi(x)e^{\alpha(x)e_3} \tag{5.36}$$

のもとで，不変になることを要請する．すると，5.5 節で述べたようにゲージ場 A_μ, B_μ の導入によるゲージ相互作用の存在が帰結するが，質量項をゲージ不変にするためには，ゲージ変換する Higgs 場との湯川結合も要求される．則ち，

$$\mathcal{L} = i\mathrm{Re}\left[\Psi^\dagger\tilde{\Gamma}^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi + \Psi e_3 A_\mu + \varpi B_\mu\Psi) - \Psi^\dagger\sigma_3\Phi\Psi e_3\right] \tag{5.37}$$

で導入されるエルミートな Higgs 場 $\Phi(x)$ が

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{-\beta(x)\varpi}\Phi(x)e^{-\beta(x)\varpi} \tag{5.38}$$

のように変換し，ゲージ対称性の自発的破れにより，真空期待値

$$\langle\Phi\rangle = m\sigma_0 \tag{5.39a}$$

を持つとする (Higgs 機構)．このようなヒッグス場が存在すれば，(5.37) はゲージ・湯川相互作用を記述する．

けれども，(5.38) が自明でない変換を与えるには，Higgs 場は

$$\Phi = \phi_1\sigma_0 - \phi_2\varpi \tag{5.39b}$$

と 2 つのエルミートな成分 $\phi_{1,2}$ しか持ち得ない ($\sigma_{1,3}$ に比例する場は変換しないので，ゼロとおく)．(5.39a) は

$$\langle\phi_1\rangle = m,\ \ \langle\phi_2\rangle = 0 \tag{5.39c}$$

を意味する．

ところで，4.5 節の結果を使って，行列 $\tilde{\Gamma}^\mu$ は (4.47a) のユニタリ行列 T によって，対角化できる．その結果，

$$\mathcal{L} = i\mathrm{Re}\left[(\psi^\dagger, \bar{\psi})\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{b}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\bar{B} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}b^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix}\right.$$
$$\left. -(\psi^\dagger, \bar{\psi})\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix} e_3 - (\psi^\dagger, \bar{\psi})\begin{pmatrix} 0 & \phi^* \\ \phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix} e_3\right] \tag{5.40a}$$

を得るが，この変形に必要な式は，(4.49b) の他，$T^{-1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)T = (\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)$ 及び (4.55a) である[*17]．$\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ は (4.49c) で定義された複素四元数 $\mathbb{H}^c$ の基底である．また，$A = b^\mu A_\mu, B = b^\mu B_\mu, \bar{A} = \bar{b}^\mu A_\mu, \bar{B} = \bar{b}^\mu B_\mu, \phi = \phi_1 + i\phi_2, \phi^* = \phi_1 - i\phi_2$ とおいた．ψ は，(4.55a) で定義される $SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルで，(4.56b) の Lorentz 変換

$$\psi(x) \to \psi'(x') = U\psi(x), \quad U \in SL(1, \mathbb{H}^c) \tag{5.40b}$$

を受ける．$Spin(2, \mathbb{H})$ スピノル Ψ に対する Majorana 条件 $\Psi^c \equiv \varpi\Psi e_1 = \Psi$ は $SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルに対して，

$$\psi = \psi\bar{b}_1 \tag{5.40c}$$

となることがわかる．また，ゲージ場 $A(x)$ の Lorentz 変換は，(4.56a) と同じで，

$$A(x) \to A'(x') = UA(x)U^\dagger, \quad U \in SL(1, \mathbb{H}^c) \tag{5.40d}$$

となる．これは，$A'(x') = b^\mu A'_\mu(x') = Ub^\mu U^\dagger A_\mu(x)$ とかき直せば，(4.57) を用いて

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x) \tag{5.40e}$$

という，ベクトル場の通常の変換則を与える．$B(x)$ についても同様．

ゲージ変換 $\Psi(x) \to e^{\beta(x)\omega}\Psi(x)e^{\alpha(x)e_3}, \Phi(x) \to e^{-\beta(x)\omega}\Phi(x)e^{-\beta(x)\omega}$ は $SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノル場 $\psi(x)$ および Higgs 場 $\phi(x)$ に対して

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}^\dagger(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi'(x) \\ \bar{\psi}'^\dagger(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\beta(x)}\,\psi(x) \\ e^{i\beta(x)}\ \ \bar{\psi}^\dagger(x) \end{pmatrix} e^{\alpha(x)e_3} \tag{5.41a}$$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{2i\beta(x)}\phi(x) \tag{5.41b}$$

となる．(5.40a) はゲージ変換 (5.41) のもとで不変なラグランジアンであるが，ゲージ場 A_μ とカイラル・ゲージ場 B_μ は e_3 の存在のため，微分形式 (5.19h) の統一的な適用を不可能にする．そこで，その e_3 を消し去る方法を考える．そのためには，5.4 節で正準量子化を行った際と同じように (5.40a) を射影成分にわければよい．つまり，(5.40a) 第 1 項は，$e_0 = E_+ + E_-$ を使い，第 2 項は，$e_3 = -i(E_+ - E_-)$ を使い，E_+ の項と E_- の項を次のように分離する．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-, \tag{5.42a}$$

$$\mathcal{L}_+ = i\mathrm{Re}\left[(\psi_L^\dagger, \bar{\psi}_{\bar{R}})\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{b}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\bar{A} + i\bar{B} & i\phi^* \\ i\phi & -\frac{1}{2}b^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + iA - iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_{\bar{R}}^\dagger \end{pmatrix}\right] \tag{5.42b}$$

$$\mathcal{L}_- = i\mathrm{Re}\left[(\psi_{\bar{R}}^\dagger, \bar{\psi}_L)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{b}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - i\bar{A} + i\bar{B} & -i\phi^* \\ -i\phi & -\frac{1}{2}b^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - iA - iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{\bar{R}} \\ \bar{\psi}_L^\dagger \end{pmatrix}\right] \tag{5.42c}$$

ここで，(4.66b) に従って，$SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルの四元数カイラル分解

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix} E_+ = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_{\bar{R}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi}^\dagger \end{pmatrix} E_- = \begin{pmatrix} \psi_{\bar{R}} \\ \bar{\psi}_L^\dagger \end{pmatrix} \tag{5.42d}$$

を使った．この形にすると，四元数の行列表現を使わなくても，(5.37) が通常知られている (Weyl 表示の) Dirac ラグランジアンに移行することが示せる．この証明のプロセスで Pauli 行列が顔を出すのは，(4.61) の所産ではなく，複素四元数の基底とスプリット基底の積の公式 (4.67) およびスプリット基底の積の実部に対する公式 (4.68) によるのである．ここでは証明の結果を先にかき，計算は後に回す．

Weyl 表示のガンマ行列 (2.36) を (5.29a) で再定義したように γ_W^μ とかき，Weyl 表示の Dirac スピノル ψ_W (2.33) を用いると，(5.42b,c) はそれぞれ

$$\mathcal{L}_+ = -\frac{1}{2}\overline{\psi}_W\left[\frac{1}{2}\gamma_W^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - i\gamma_W^\mu A_\mu + i\gamma_W^\mu\gamma_W^5 B_\mu + \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\right]\psi_W \tag{5.43a}$$

$$\mathcal{L}_- = -\frac{1}{2}\psi_W^T\left[\frac{1}{2}\gamma_W^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\gamma_W^{\mu\,T}A_\mu - i(\gamma_W^\mu\gamma_W^5)^T B_\mu - \begin{pmatrix}\phi 1_2 & 0_2\\ 0_2 & \phi^* 1_2\end{pmatrix}\right]\overline{\psi}_W^T \tag{5.43b}$$

となる．したがって、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-\\ &= -\frac{1}{2}[\overline{\psi}_W, \frac{1}{2}\gamma_W^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_W] + J^\mu A_\mu + J_5^\mu B_\mu - J\phi_1 - J_5\phi_2\end{aligned} \tag{5.43c}$$

を得る．ここで，J, J_5, J^μ, J_5^μ は 5.6 節最後に出てきた J, J_5, J^μ, J_5^μ の Weyl 表示での表式である．このようにして，四元数 Dirac ラグランジアンは「反対称化」された Weyl 表示の Dirac ラグランジアンになることがわかった．Pauli のレンマにより，Dirac 行列の任意の表示に移ることができる．則ち，(5.43) に現れる添字 W はなくてもよい．カレントも任意の表示のものを持ってきてよい．

<u>(5.42) から (5.43) を導くこと</u>

これは退屈な計算であるが，四元数の行列表現を用いないで，四元数 Dirac 理論が (反対称化された双一次形式を持つ) 通常の Dirac 理論に等価であることを示す点で，興味深い．それで，その証明をスケッチする．

まず，プラスの成分 $\mathcal{L}_+$ については次のようになる．$\mathcal{L}_+$ に現れる $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルの四元数カイラル成分が

$$\psi_L \equiv \psi E_+ = v_\alpha\xi^\alpha, \quad \bar{\psi}_R^\dagger \equiv \bar{\psi}^\dagger E_+ = \bar{v}^{\alpha\,\dagger}(\eta_\alpha)^* = v_\alpha\bar{\eta}_{\dot\alpha}, \quad (\alpha = 1,2, \dot\alpha = \dot1, \dot2) \tag{5.44a}$$

とかけることに注意する．公式 (4.67) のうち，$b^\mu v_\alpha = v_\beta(\sigma^\mu)_{\beta\alpha}$, $\bar{b}^\mu v_\alpha = v_\beta(\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha}$ と，関係式 $\mathrm{Re}\,[v_\alpha^\dagger v_\beta] = (1/2)\delta_{\alpha\beta}$ を用いると，

$$\mathcal{L}_+ = i(\bar{\xi}^{\dot\alpha}, \eta_\alpha)Q_{\alpha\beta}\begin{pmatrix}\xi^\beta\\ \bar{\eta}_{\dot\beta}\end{pmatrix}$$

$$Q_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\bar{b}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\bar{A} + i\bar{B} & i\phi^*\\ i\phi & -\frac{1}{2}b^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu + iA - iB\end{pmatrix}v_\beta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger v_\gamma\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^\mu_{\gamma\beta}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\bar{\sigma}^\mu_{\gamma\beta}A_\mu + i\bar{\sigma}^\mu_{\gamma\beta}B_\mu & i\phi^*\delta_{\gamma\beta}\\ i\phi\delta_{\gamma\beta} & -\frac{1}{2}\sigma^\mu_{\gamma\beta}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\sigma^\mu_{\gamma\beta}A_\mu - i\sigma^\mu_{\gamma\beta}B_\mu\end{pmatrix}\right]$$

$$
= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + i\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}A_{\mu} + i\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}B_{\mu} & i\phi^{*}\,\delta_{\alpha\beta} \\ i\phi\,\delta_{\alpha\beta} & -\frac{1}{2}\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + i\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}A_{\mu} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}B_{\mu} \end{pmatrix}\right]
$$

$$
= -\frac{1}{2}\gamma^{0}_{W}\left[\gamma^{0}_{W}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + i\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}A_{\mu} + i\bar{\sigma}^{\mu}_{\alpha\beta}B_{\mu} & i\phi^{*}\delta_{\alpha\beta} \\ i\phi\delta_{\alpha\beta} & -\frac{1}{2}\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + i\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}A_{\mu} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\beta}B_{\mu} \end{pmatrix}\right] \tag{5.44b}
$$

となる．ここで，Weyl 表示のガンマ行列 (2.36)，(3.38) を用いて，

$$
\gamma^{0}_{W}\begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^{\mu} & 0_2 \\ 0_2 & i\sigma^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0_2 \end{pmatrix} = -i\gamma^{\mu}_{W}
$$

$$
\gamma^{0}_{W}\begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^{\mu} & 0_2 \\ 0_2 & -i\sigma^{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0_2 \end{pmatrix} = i\gamma^{\mu}_{W}\gamma^{5}_{W}
$$

になることを利用すると，

$$
\mathcal{L}_{+} = -\frac{1}{2}\overline{\psi}_{W}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\mu}_{W}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} - i\gamma^{\mu}_{W}A_{\mu} + i\gamma^{\mu}_{W}\gamma^{5}_{W}B_{\mu} + \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^{*}1_2 \end{pmatrix}\right]\psi_{W}
$$

のように計算できる．

マイナス成分も同じく，

$$
\psi_{\bar{R}} \equiv \psi E_{-} = v^{\alpha}\eta_{\alpha}, \bar{\psi}^{\dagger}_{L} \equiv \bar{\psi}^{\dagger}E_{-} = \bar{v}^{\dagger}_{\alpha}(\xi^{\alpha})^{*} = v^{\alpha}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}, \quad (\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}) \tag{5.45}
$$

に注意して，

$$
\mathcal{L}_{-} = i(\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}, \xi^{\alpha})P_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} \eta_{\beta} \\ \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}
$$

$$
P_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Re}\left[v^{\alpha\,\dagger}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\bar{b}^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} - i\bar{A} + i\bar{B} & -i\phi^{*} \\ -i\phi & -\frac{1}{2}b^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} - iA - iB \end{pmatrix} v^{\beta}\right]
$$

となるが，公式 (4.67) のうち，$b^{\mu}v^{\alpha} = v^{\beta}(\bar{\sigma}^{\mu\,T})_{\beta\alpha}$，　$\bar{b}^{\mu}v^{\alpha} = v^{\beta}(\sigma^{\mu\,T})_{\beta\alpha}$，と関係式 $\mathrm{Re}\,[v^{\alpha\,\dagger}v^{\beta}] = (1/2)\delta_{\alpha\beta}$ を用いると，

$$
P_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\gamma^{0}_{W}\left[\frac{1}{2}\gamma^{\mu\,T}_{W}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} + i\gamma^{\mu\,T}_{W}A_{\mu} - i(\gamma^{\mu}_{W}\gamma^{5}_{W})^{T}B_{\mu} - \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^{*}1_2 \end{pmatrix}\right]_{(\alpha\beta)}
$$

となる; 右辺の添字 $(\alpha\beta)$ は (5.44b) と同じ意味である．ここで，Weyl 表示のガンマ行列 (2.36)，(3.38) を用いて，

$$
\gamma^{0}_{W}\begin{pmatrix} \sigma^{\mu\,T} & 0_2 \\ 0_2 & \bar{\sigma}^{\mu\,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & -i\bar{\sigma}^{\mu\,T} \\ -i\sigma^{\mu\,T} & 0_2 \end{pmatrix} = -\gamma^{\mu\,T}_{W}
$$

$$\gamma_W^0 \begin{pmatrix} i\sigma^{\mu\,T} & 0_2 \\ 0_2 & -i\bar{\sigma}^{\mu\,T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & -\bar{\sigma}^{\mu\,T} \\ \sigma^{\mu\,T} & 0_2 \end{pmatrix} = -i(\gamma_W^\mu \gamma_W^5)^T$$

を用いた．かくして，

$$\mathcal{L}_- = -\frac{1}{2}\psi_W^T \left[\frac{1}{2}\gamma_W^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\gamma_W^{\mu\,T} A_\mu - i(\gamma_W^\mu \gamma_W^5)^T B_\mu - \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\right]\overline{\psi}_W^T$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- \\
&= -\frac{1}{2}\overline{\psi}_W \left[\frac{1}{2}\gamma_W^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - i\gamma_W^\mu A_\mu + i\gamma_W^\mu \gamma_W^5 B_\mu + \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\right]\psi_W \\
&\quad - \frac{1}{2}\psi_W^T \left[\frac{1}{2}\gamma_W^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + i\gamma_W^{\mu\,T} A_\mu - i(\gamma_W^\mu \gamma_W^5)^T B_\mu - \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\right]\overline{\psi}_W^T \\
&= -\frac{1}{4}\left[\overline{\psi}_W \gamma_W^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_W + \psi_W^T \gamma^{\mu\,T}\overleftrightarrow{\partial}_\mu \overline{\psi}_W^T\right] + J^\mu A_\mu + J_5^\mu B_\mu \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\overline{\psi}_W \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\psi_W - \psi_W^T \begin{pmatrix} \phi 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \phi^* 1_2 \end{pmatrix}\overline{\psi}_W^T\right] \\
&= -\frac{1}{4}[\overline{\psi}_W, \gamma_W^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_W] + J^\mu A_\mu + J_5^\mu B_\mu - J\phi_1 - J_5\phi_2
\end{aligned}$$

これが (5.43c) 式．□

5.8　四元数変分原理と Noether の定理

この節では，次章で使われる四元数変分原理の簡単な説明を試みる．

まず，四元数 Dirac ラグランジアン (5.40a) において，ゲージ相互作用を無視し，湯川結合は Higgs 場をその真空期待値 (5.39c) で近似すると，

$$\mathcal{L}_D = \mathrm{Re}\left[\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi) - m\psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger b_3 + \mathrm{h.c.}\right] \equiv \mathcal{L}_D(\bar{\partial}) \tag{5.46}$$

という自由な Dirac 場のラグランジアンが得られる．ただし，h.c. はエルミート共役を表し，微分演算子

$$\partial \equiv -b^\mu \partial_\mu \tag{5.47}$$

を定義した．(5.46) はもちろん (5.5c) から直接得られる．ψ と $\psi^\dagger$ は独立に変分できるので

$$\delta\mathcal{L}_D(\bar{\partial}) = 2\mathrm{Re}\,[\delta\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi - m\bar{\psi}^\dagger b_3) + \mathrm{h.c.}] + (\text{全微分項})$$

の結果，運動方程式として，

$$i\bar{\partial}\psi - m\bar{\psi}^\dagger b_3 = 0 \tag{5.48}$$

およびこのエルミート共役が得られる[18)]．これらは，再び (5.4a) から得られるものと一致する．もし，ψ が Majorana 条件 $\psi\bar{b}_1 = \psi$ を満たす Majorana スピノルであっても，この条件が線形であることから，ψ と $\psi^\dagger$ はやはり独立に変分できる．従って，(5.48) は $\overline{(\psi\bar{b}_1)}^\dagger b_3 = \bar{\psi}^\dagger(-\bar{b}_1)b_3 = (\bar{\psi}^\dagger b_3)\bar{b}_1$ に注意すれば，Majorana スピノル $\psi = \psi\bar{b}_1$ に対しても成り立つ．これは，Majorana スピノルに対して，2 成分スピノルを用いる場合と同じ事情であるが，次章第 3 節で述べる，四元数形式の超対称模型への応用において，計算上の簡単化をもたらす．なお，Dirac 行列を使う 4 成分スピノル表示では，Majorana 条件が反線形なので，Majorana スピノルとその Dirac 共役は独立に変分できないことに注意したい．

次に，Noether の定理の応用として (5.46) の Poincaré 不変性および位相不変性から導かれる保存則を四元数形式で定式化する．通常の記号では，この保存則は既に，(3.34)，(3.35)，(3.36) で求めてある．四元数形式でも全く同じ方法を踏襲するわけだが，記号が違うので，敢えて追加することにしたい．

座標の無限小 Poincaré 変換 $x^\mu \to x^{\mu\,\prime} = x^\mu + \delta x^\mu, \partial_\mu \delta x^r = 0$, のもとで，$SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルが

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x) + \delta\psi(x) \tag{5.49}$$

と変換したとする．この変換のもとで，ラグランジアン (5.46) は不変である．

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_D(\bar{\partial}) = \mathrm{Re}\,[&\psi'^\dagger(x')(i\bar{\partial}'\psi'(x')) - m\psi'^\dagger(x')\bar{\psi}'^\dagger(x')b_3 + \mathrm{h.c.}]\\ &- \mathrm{Re}\,[\psi^\dagger(x)(i\bar{\partial}\psi(x)) - m\psi^\dagger(x)\bar{\psi}^\dagger(x)b_3 + \mathrm{h.c.}] = 0\end{aligned} \tag{5.50}$$

δ の 1 次のオーダーでは $\partial' = \partial + b^\mu(\partial_\mu \delta x^\nu)\partial_\nu$ とかけるので，次のようになる．

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(\bar{\partial}) = 2\mathrm{Re}\,[&\delta^*\psi^\dagger(x)(i\bar{\partial}\psi(x) - m\bar{\psi}^\dagger(x)b_3) + \mathrm{h.c.}]\\ &+ \partial_\mu \mathrm{Re}\,[-i\psi^\dagger(x)\bar{b}^\mu\delta^*\psi(x) + \mathrm{h.c.}] + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}_D(\bar{\partial}) = 0\end{aligned} \tag{5.51}$$

ここで運動方程式を使い，無限小 Poincaré 変換に対しては $\partial_\mu\delta x^\mu = 0$ となることを使うと，保存則

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{5.52a}$$

$$J^\mu = \mathrm{Re}\,[-i\psi^\dagger \bar{b}^\mu \delta^* \psi + i(\delta^*\psi)^\dagger \bar{b}^\mu \psi] + \delta x^\mu \mathcal{L}_D(\bar{\partial}) \tag{5.52b}$$

を得る．これが今の場合の Noether の定理の応用である．$\delta^*\psi(x) = \delta\psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x)$ であるから，

$$J^\mu = \mathrm{Re}\,[-i\psi^\dagger \bar{b}^\mu \delta\psi + i(\delta\psi)^\dagger \bar{b}^\mu \psi] + \delta x^\nu T^\mu{}_\nu \tag{5.53a}$$

$$T^\mu{}_\nu = \mathrm{Re}\,[i\psi^\dagger \bar{b}^\mu \partial_\nu \psi - i(\partial_\nu\psi)^\dagger \bar{b}^\mu \psi] + \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_D(\bar{\partial}) \tag{5.53b}$$

とかけることに注意しよう．推進変換 $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$ ($\varepsilon^\mu =$ 無限小定数) のもとでは $\delta\psi = 0$ だから，保存する Noether 流はエネルギー・運動量テンソル

$$J^\mu = \varepsilon^\nu T^\mu{}_\nu \tag{5.54a}$$

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{5.54b}$$

である．一方，無限小 Lorentz 変換に対しては，(4.57) において，$U = 1 + \delta U$ とかいて，

$$\delta \mathsf{x} = \delta U \mathsf{x} + \mathsf{x} \delta U^\dagger \tag{5.55a}$$

$$\delta\psi = \delta U \psi \tag{5.55b}$$

となる．$U \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ であるから，$\overline{\delta U} = -\delta U$，従って，$\delta U^0 = 0$ である．(4.63a) を用いれば，

$$\delta x^\mu = [(\Omega_\rho \delta U^\rho) + (\Omega^*_\rho \delta U^{\rho\,*})]^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \mathsf{x} = b_\mu x^\mu \tag{5.56a}$$

$$\delta\psi^\mu = (\Omega_\rho \delta U^\rho)^\mu{}_\nu \psi^\nu, \quad \psi = b_\mu \psi^\mu \tag{5.56b}$$

とかかれる．ただし，Ω は (4.63b,c) で定義されている行列である．これを (5.53a) に代入すれば，

$$J^\mu = \delta U^\rho M^\mu{}_\rho + \delta U^{\rho\,*} M^\mu{}_\rho{}^* \tag{5.57a}$$

$$M^\mu{}_\rho = -i\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger \bar{b}^\mu b_\nu (\Omega_\rho)^\nu{}_\lambda \psi^\lambda] + T^\mu{}_\nu (\Omega_\rho)^\nu{}_\lambda x^\lambda \tag{5.57b}$$

$$M^\mu{}_\rho{}^* = i\mathrm{Re}\,[(b_\nu (\Omega_\rho)^\nu{}_\lambda \psi^\lambda)^\dagger \bar{b}^\mu \psi] + T^\mu{}_\nu (\Omega^*_\rho)^\nu{}_\lambda x^\lambda \tag{5.57c}$$

$$\partial_\mu M^\mu{}_\rho = \partial_\mu M^\mu{}_\rho{}^* = 0 \tag{5.57d}$$

を得る．なお，$\delta U^0 = 0$ なので，ρ についての和は $\rho = i = 1, 2, 3$ に限られ，

(5.57d) は 6 個の保存則を与える．これは，(3.35d) に対応する．

また (5.46) は

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x)e^{-i\alpha b_3}, \quad \alpha: \text{実定数} \tag{5.58}$$

という位相不変性を持つ．この場合，$\delta x^\mu = 0, \delta\psi = -i\alpha\psi b_3$ なので，保存するカレントは，α で割算して，

$$J^\mu = -\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger \bar{b}^\mu \psi b_3 + \bar{\psi} b^\mu \bar{\psi}^\dagger b_3] = -2\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger \bar{b}^\mu \psi b_3] \tag{5.59}$$

となる．(5.59) はベクトル・カレント (5.20d) と同じである．

最後に，四元数変分を四元数微分で表す公式をまとめておく．四元数微分は複素数の微分の一般化である．いま，任意の $q = b_\mu q^\mu \in \mathbb{H}^c$ に関する微分を

$$\frac{\partial}{\partial q} \equiv \bar{b}_\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} = b_0 \frac{\partial}{\partial q^0} - b_1 \frac{\partial}{\partial q^1} - b_2 \frac{\partial}{\partial q^2} - b_3 \frac{\partial}{\partial q^3} \equiv -b^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tag{5.60}$$

と定義する[19)]．この記号を使うと，(5.47) の $\partial \equiv \partial/\partial \mathsf{x}$ である．すると，

$$\frac{\partial q}{\partial q} = -2, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} = 4, \quad \frac{\partial q^\dagger}{\partial q} = 0 \tag{5.61}$$

となる．複素数 $z = x + iy$ に対しては，$\partial/\partial z = (1/2)(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ とおいて $\partial z/\partial z = 1, \partial z^*/\partial z = 0$ となるのは周知であり，この場合因子 1/2 は意味があるのだが，四元数の場合は，$\partial q/\partial q = 1$ と定義しても，$\partial\bar{q}/\partial q \neq 0$ なので，(5.60) には余分の規格化因子をつけない．

いま，$p \in \mathbb{H}^c$ を q に独立とすると，

$$\frac{\partial(\bar{p}q)}{\partial q} = \begin{cases} -2p & ([p^\mu, q^\nu] = 0 \text{ のとき}) \\ +2p & (\{p^\mu, q^\nu\} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.62a}$$

$$\frac{\partial(\bar{q}p)}{\partial q} = 4p \quad ([p^\mu, q^\nu]_\pm = 0 \text{ いずれでも}) \tag{5.62b}$$

であるが，四元数微分を変分原理に応用するとき，ラグランジアンが四元数の実部で定義されていることに注意して，上式を

$$\frac{\partial}{\partial q}\mathrm{Re}\,[\bar{p}q] = \begin{cases} +\dfrac{\partial}{\partial q}\mathrm{Re}\,[q\bar{p}] = +p & ([p^\mu, q^\nu] = 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{\partial}{\partial q}\mathrm{Re}\,[q\bar{p}] = -p & (\{p^\mu, q^\nu\} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.63}$$

とかき直しておく．則ち，ある変数 q で微分するときは，実部の中をいつも微分される変数が一番前に来るように，$\mathrm{Re}\,[q\cdots]$ の形に変形してから，q を落とし $\overline{\cdots}$ だけ残せばよい．Grassmann 変数を取り扱う場合の符号の問題は，この変形の際にのみ関係する．例えば，いま p, q 共に Grassmann 変数のときは，(5.63) の例以外では，$\mathrm{Re}\,[\,p\bar{q}\,] = \mathrm{Re}\,[\,\overline{p\bar{q}}\,] = -\mathrm{Re}\,[\,q\bar{p}\,]$ とするなど．この一般化は容易で，q_A $(A = 1, 2, \cdots)$ を普通の複素四元数 $p \in \mathbb{H}^c$ に独立な任意の複素 (Grassmann) 四元数として，

$$\frac{\partial}{\partial q_A}\mathrm{Re}\,[\bar{p}q_C q_B] = \delta^A{}_C\, p\bar{q}_B \pm \delta^A{}_B\, \bar{q}_C p \tag{5.64a}$$

となる．右辺第 1 項を得るときは，実部を $\mathrm{Re}\,[\,q_C q_B \bar{p}\,]$ と変形して，q_C を落とす．そのとき，$\delta^A{}_C$ が出てきて，$\overline{q_B\bar{p}} = p\bar{q}_B$ を残す．右辺第 2 項を得るときは，実部を $\pm\mathrm{Re}\,[\,q_B\bar{p}q_C\,]$ と変形して，q_B を落とす．そのとき，$\delta^A{}_B$ が出てきて，$\pm\overline{\bar{p}q_C} = \pm\bar{q}_C p$ を残す．ただし，$\pm$ のサインはすべての q_A が普通の複素四元数のときには $+$ を，すべての q_A が複素 Grassmann 四元数のときには $-$ を選ぶ．これを使うと，変分を微分で表すことができる．

$$\delta\mathrm{Re}\,[\bar{p}q_C q_B] = \pm\mathrm{Re}\left[\left\{\frac{\partial\mathrm{Re}\,[\bar{p}q_C q_B]}{\partial q_A}\right\}\delta\bar{q}_A\right] \tag{5.64b}$$

符号については，(5.64a) と同じ約束をする．これを応用すれば，一般的な四元数変分原理を定式化できるが，ここでは割愛する．

5.7 節では，例として，Higgs 機構を内蔵したカイラル $U(1)\times U(1)$ ゲージ理論を説明し，相互作用を決める上で果たすゲージ原理の理論構造を見てきた (Higgs 場が真空期待値 (5.39a,b,c) を持つヒッグス・ポテンシャルについては所与のものとみなした場合においてすら言及しなかったので，Higgs 機構の真の理解には至っていないが)．ただその物理的内容の豊富さは，Higgs 機構を内蔵したゲージ場の量子論へ進んで，繰り込み理論を適用しなければ，到底味わうことができない．ただし，理論に如何なるゲージ対称性が存在するかについては，ゲージ原理は何も教えてくれない．この点で，物質の存在パターンと共に，現実的なモデルとなりうる理論に存在するゲージ対称性は実験だけが決めることができる．既に確立している素粒子の標準模型は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ というゲージ対称性を持っている．第 7, 8 章で内部対称性を支配するのは特殊な「数」

四元数と八元数にもとづくと考えると，これと似たゲージ対称性を持つ理論が生まれることを論ずる．これは単なる1つの思弁による結果に過ぎないが，八元数は結合的多元環でないので，八元数ゲージ理論には，この節で述べた微分形式が適用できないことを指摘し，にもかかわらず，八元数ゲージ理論を矛盾なく構成できるかという問題提起の意味も含む．その前に，次章では四元数 Dirac 理論の応用として，曲がった4次元時空の構造の問題を取り上げたい．

第 5 章の注および参考文献

1) K. Morita, 'A Role of Quaternions in the Dirac Theory', Progr. Theor. Phys. **75**(1986), pp.220-223.
P. Rotteli, 第 4 章文献 19).

2) 四元数 Dirac スピノルの Dirac 共役は $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{\Psi}^\dagger \sigma_3$ であるが，今後この記号は使わない．なお，第 4 章注 14) で述べたように，四元数行列 $\Gamma_{4,5}$ の代わりに今後も，Pauli 行列の記号 $\sigma_{1,3}$ を用いるが，四元数行列方程式に現れた場合は，あくまで四元数行列の意味に取る．(2.21b) で与えられる行列 ϖ についても同様である．

3) 相互作用表示では，正規積をとることにより Fermi 統計から生ずる符号を考慮して演算子の順序を自由に変えられるので，このことは普通問題にならない．

4) W. Pauli, '*On the Conservation of Leptonic Charge*', Nuovo Cimento **6** (1957), pp.204-215.
F. Gürsey, '*Relation of Charge Independence and Baryon Conservation to Pauli's Transformation*', Nuovo Cimento **7** (1958), pp.411-415.
K. Nishijima, p.345, in '*Fundamental Particles*', W.A. Benjamin, Inc. (1964).
西島和彦著,『場の理論』紀伊國屋書店 (1987) p.120.

5) 一般に，$\delta\boldsymbol{\Psi}$ と $\delta\boldsymbol{\Psi}^\dagger$ が独立でないのは次の理由による．いま，四元数微分 $\partial/\partial q$ を $\partial q/\partial q = 1$ となるように定義すれば，必ず $\partial\bar{q}/\partial q = -1/2$ となる．それ故，$\delta\boldsymbol{\Psi}$ に現れる $\delta\zeta^{1,2}$ と $\delta\boldsymbol{\Psi}^\dagger$ に現れる $\overline{\delta\zeta^{1,2}}$ は独立ではない．これに対し，複素数の場合は，$\partial z/\partial z = 1$ と定義すれば，$\partial z^*/\partial z = 0$ が成り立つ．それ故，Dirac スピノル ψ とその Dirac 共役 $\bar{\psi}$ は独立に変分できる．

6) 次章 5.6 節で，$\boldsymbol{\Psi}(x)$ を第 3 章で議論した Dirac スピノル $\psi(x)$ と結びつける．従って，古典論において，$\psi(x)$ を Grassmann 変数と仮定する限りは，$\boldsymbol{\Psi}(x)$ も Grassmann 変数でなければならない．

7) その意味は，次のようである．いま $q = e_0 q_0 + e_i q_i$, $q_\mu \in \mathbb{C}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を複素四元数として，その微分を $\partial/\partial q = e_0(\partial/\partial q_0) - e_i(\partial/\partial q_i)$ で定義する．$\partial q_\mu/\partial q_\nu = \delta_{\mu\nu}$ なら，$\partial q_\mu^*/\partial q_\nu = 0$ だから，$\partial q/\partial q = 4$, $\partial\bar{q}/\partial q = -2$, $\partial q^*/\partial q = 0$ である．即ち，q^* と q は独立である．従って，$\boldsymbol{\Psi}_+$ と $\boldsymbol{\Psi}_-$ は独立．

8) 時空対称性に関係する対称性を外部対称性，それとは無関係な対称性を内部対称性という．

9) C. N. Yang and R. L. Mills, 'Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance', Phys. Rev. 96 (1954), pp.191-195.
R. Shaw, 'The Problem of Particle Types and Other Contributions to Theory of Elementary Particles', Ph. D. thesis, Cambridge Univ. (1955).
R. Utiyama, 'Invariant Theoretical Interpretation of Interaction', Phys. Rev. 101 (1956), pp.1597–1607.

10) 質量を生成する Higgs 機構で補強されたゲージ原理だけでは，ゲージ不変な全ラグランジアンは一意的には決まらない．繰り込み可能性という要請を別個おく．後者は，ゲージ場の量子論に予言可能性を与えるだけでなく，物質の存在形態に一定の制約を与える，量子異常相殺の条件に導く．

11) ゲージ場自身は非物理的成分を含むから観測可能ではない．しかし，$e^{-i\alpha(x)}$ は一価関数でなくてはならないので，積分因子 $e^{-i\oint dx^\mu A_\mu(x)}$ は任意関数 $\alpha(x)$ に依存しない．従って，観測可能となる．これは Bohm-Aharonov 効果として知られている．

12) この節と次節では，Weyl 表示に関する量にはカレントを除いてすべて添字 W をつけて表す．なお，(5.29a) のユニタリ行列 S は (4.47b) に現れた複素四元数行列 T^{-1} の Pauli 表現に等しい．Dirac 行列の Pauli 表示という呼称は次の文献でも使われているが，定義は異なる．

K. Nishijima, 'Fields and Particles', W.A. Benjamin, (1969).

13) 自明でない S を用いれば，このことは任意の表示において証明されたことになる．

14) 任意の表示で．なお，Majorana 条件 $\Psi^c = \varpi\Psi e_1 = \Psi \to \zeta^2 = \zeta^1 e_1$ を意味する．

15) 四元数共役 $q \to \bar{q}$ は $\overline{qp} = \overline{p}\,\overline{q}$ を満たすので，反自己同型であるが，e_2 の符号を変えない四元数共役 $q \to \overline{q}^t = e_0q_0 - e_1q_1 + e_2q_2 - e_3q_3$ は自己同型である．実際，$\overline{q}^t = e_2qe_2^{-1}$ とかけるので，内部自己同型である．従って，$\overline{qp}^t = \overline{q}^t\overline{p}^t$ が成り立つ．このことに注意すると，演算子 $\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}q\mathcal{T}^{-1} = \bar{q}^t$ の他，$\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i$ も満たすので，量子化された Dirac ラグランジアン (5.5c) は時間反転のもとで，次のように変換する．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}\mathcal{L}(x)\mathcal{T}^{-1} \\
&= -i\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathcal{T}\Psi^\dagger(x)\mathcal{T}^{-1}\bar{\tilde{\Gamma}}^{t\,\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\mathcal{T}\Psi(x)\mathcal{T}^{-1} - m\mathcal{T}\Psi^\dagger(x)\mathcal{T}^{-1}\sigma_3\mathcal{T}\Psi(x)\mathcal{T}^{-1}(-e_3)\right] \\
&= -i\mathrm{Re}\Big[(e_2\frac{1}{2}\overline{\Psi}^{t\,\dagger}(x_T)\sigma_3)\bar{\tilde{\Gamma}}^{t\,\mu}\overleftrightarrow{\partial}_\mu(-\sigma_3\overline{\Psi}^t(x_T)e_2) \\
&\quad - m(e_2\overline{\Psi}^{t\,\dagger}(x_T)\sigma_3)\sigma_3(-\sigma_3\overline{\Psi}^t(x_T)e_2)(-e_3)\Big] \\
&= i\mathrm{Re}\left[\overline{\frac{1}{2}\Psi^\dagger(x_T)\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}^T_\mu\Psi(x_T) - m\Psi^\dagger(x_T)\sigma_3\Psi(x_T)e_3}^{\,t}\right] \\
&= i\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\Psi^\dagger(x_T)\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}^T_\mu\Psi(x_T) - m\Psi^\dagger(x_T)\sigma_3\Psi(x_T)e_3\right] = \mathcal{L}(x_T)
\end{aligned}
$$

ここで，$\sigma_3\tilde{\Gamma}^\mu\sigma_3\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \Gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu = -\tilde{\Gamma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}^T_\mu$，$e_3 = -\overline{e_3}^t$ および $\mathrm{Re}\,[\bar{q}^t]=\mathrm{Re}\,[q]$ を用いた．従って，作用は不変となる．

16) $S \neq 1_4$ を適当に選べば，任意の表示においてこのことが証明された．従って，Dirac 場の 2 次形式に対する反対称化という形式的操作は，古典論における荷電共役変換の反線形性が四元数 Dirac 理論の定式化により線形化された結果，一貫した数学的形式に基づいていることがわかった．

*17) 四元数関係式に現れる ψ はいつも $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルを意味し，$\overline{\psi}$ はその四元数共役である．それに対し，ガンマ行列と一緒に現れる ψ は 4 成分 Dirac スピノルで，そ

の $\overline{\psi}$ は (2.42) で定義される Dirac 共役である．

18) 第 3 章の注 5) で述べた周知のことを繰り返すようだが，(5.48) とそのエルミート共役から，ψ は Klein-Gordon 方程式を満たすことが分かる．さらに，例えば，$\psi_L = \psi E_+$ が分かれば，$\psi_{\bar{R}} = \psi E_-$ が決まることが示せる．従って，$SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノル $\psi = b_\mu \psi^\mu$ が持つ 4 つの複素成分のうち，独立なのはその半分である．Majorana スピノルは条件 $\psi \bar{b}_1 = \psi$ に従うので，独立な成分はさらにその半分になる．

19) 四元数微分をこのように定義したのは Gürsey である．
F. Gürsey, 'On a Conform-Invariant Spinor Wave Equation', Nuovo Cimento, **III** N.5 (1956), pp.988-1006.

第 6 章

四元数と 4 次元時空構造

この章では，前 2 章で展開した (複素四元数を用いた) 四元数形式を重力のゲージ理論，特に，Poincaré ゲージ理論および 4 次元単純超重力理論に応用する．はじめに，(複素四元数上の) 四元数場はすべて座標テンソル場であること，すなわち，一般座標変換のもとでテンソル場として変換することを証明する．次に，局所 Lorentz 系における振る舞いとしては，スカラー場，ベクトル場，反対称テンソル場，およびスピノル場のみが許されることがわかる．それ故，座標スカラー場には，通常のスカラー場，スピノル場，内部対称性に関するゲージ場が属し，四脚場は四元数四脚場と呼ばれる四元数座標ベクトル場としてとらえ直される．Rarita-Schwinger 場，Lorentz ゲージ場も四元数座標ベクトル場である．また 2 階の対称な座標テンソル場として，四元数スカラーである計量テンソルがある．

次節で，(複素四元数上の) 四元数場である座標スカラー場と座標ベクトル場を定義し，Poincaré ゲージ不変な Dirac 方程式を導く．6.2 節で計量テンソルを四元数四脚場から定義し，Poincaré ゲージ理論が時空のモデルとして採用する Riemann-Cartan 時空 U_4 の幾何学を説明する．U_4 を特徴づける捩率はまだ観測されていないにも拘わらず，Poincaré ゲージ理論は，マクロな領域で成功している Einstein の重力理論をミクロな領域にも妥当するよう，ゲージ原理に基づいて構成した自然な重力理論である．

四元数四脚場，Rarita-Schwinger 場および Lorentz ゲージ場からなる四元数座標ベクトル場は 4 次元単純超重力理論の構成要素をなす．その場合，Rarita-Schwinger 場は局所超対称変換に関するゲージ場として導入される．補助場を入れない形で，4 次元単純超重力理論の四元数形式を 6.4 節で取り扱うが，その前に 6.3 節で超対称性をもつ 4 次元場の理論のモデルとして，最初に

提案された Wess-Zumino 模型を例に，四元数変分原理の簡単な応用を試みる．なお，この章に限り，局所 Lorentz 系におけるテンソル・スピノル量を表すのに，ラテン文字の添え字 $i, j, k, \cdots$，任意の曲線座標系におけるテンソル量を表すのに，ギリシャ文字の添え字 $\mu, \nu, \rho, \cdots$ を使う．従って，いずれも 0,1,2,3 という値を取る．

6.1　四元数場の一般座標変換性

四元数を用いて Poincaré ゲージ不変な Dirac 理論を記述する際，四元数行列を使わない複素四元数の方法の方が見通しがよい．それゆえ，この章で四元数場といえば，複素四元数上で定義された局所場を意味する．またすべて古典論の範囲で議論する．さらに，この章では他の章とは違った記号を使うので，他の章と独立して読めるように，4.5 節で述べた複素四元数の計算規則を，改めてまとめ直す．ただし，その節で述べた，四元数とは可換な新しい虚数単位 (i と同定した) の存在は改めて証明しない．

任意の複素四元数 $q \in \mathbb{H}^c$ は次のように表される．

$$q = b_0 q^0 + b_1 q^1 + b_2 q^2 + b_3 q^3 \equiv b_i q^i = q^i b_i, \quad q^i \in \mathbb{C} \tag{6.1a}$$

ここで，複素四元数の基底 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ は (4.49c) のように

$$b_0 \equiv e_0, \quad b_1 \equiv ie_1, \quad b_2 \equiv ie_2, \quad b_3 \equiv ie_3 \tag{6.1b}$$

と定義した．$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ は Hamilton の四元数の基底で，その虚数単位 e_i は積法則 (1.24)，すなわち，

$$e_i \bar{e}_j + e_j \bar{e}_i = 2\delta_{ij}, \quad (\delta_{ij}) = \mathrm{diag}\,(+1, +1, +1, +1) \tag{6.1c}$$

を満足する．ラテン添字の上げ下げは定計量 $(\eta_{ij}) = (\eta^{ij}) =\mathrm{diag}\,(-1, +1, +1, +1)$ で行う．従って，(6.1a) の q はまた

$$q = b^0 q_0 + b^1 q_1 + b^2 q_2 + b^3 q_3 \equiv b^i q_i = q_i b^i, \quad q_i = \eta_{ij} q^j, \quad b^i = \eta^{ij} b_j \tag{6.1d}$$

とも表される．(6.1b) の定義により，複素四元数の基底は，

$$b_i \bar{b}_j + b_j \bar{b}_i = -2\eta_{ij}, \quad \bar{b}_i b_j + \bar{b}_j b_i = -2\eta_{ij} \tag{6.1e}$$

$$b^i \bar{b}^j + b^j \bar{b}^i = -2\eta^{ij}, \quad \bar{b}^i b^j + \bar{b}^j b^i = -2\eta^{ij} \tag{6.1f}$$

という関係に従う．なお，(6.1c,e,f) の右辺には四元数の単位元 $e_0 = b_0$ が省略されている．今後もこのような慣例に従う．

複素四元数の共役には 3 種類ある．

$$\text{四元数共役}\begin{cases} \bar{q} = b_0 q^0 - b_1 q^1 - b_2 q^2 - b_3 q^3 = \bar{b}_i q^i \\ \overline{qp} = \pm \bar{p}\,\bar{q} \qquad (\,[\,q_i, p_j\,]_\pm = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.2a}$$

$$\text{複素共役}\begin{cases} q^* = b_0 (q^0)^* - b_1 (q^1)^* - b_2 (q^2)^* - b_3 (q^3)^* \\ (qp)^* = q^* p^* \end{cases} \tag{6.2b}$$

$$\text{エルミート共役}\begin{cases} q^\dagger = b_0 (q^0)^\dagger + b_1 (q^1)^\dagger + b_2 (q^2)^\dagger + b_3 (q^3)^\dagger \\ (qp)^\dagger = p^\dagger\, q^\dagger \end{cases} \tag{6.2c}$$

ただし，$\bar{b}_0 = b_0$，$\bar{b}_a = -b_a \ (a = 1, 2, 3)$. (6.2a) を使って複素四元数の実部を

$$\mathrm{Re}\,[\,q\,] = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \tag{6.3}$$

で定義すれば，(6.1e,f) は

$$\mathrm{Re}\,[\,b_i \bar{b}_j\,] = \mathrm{Re}\,[\,\bar{b}_i b_j\,] = -\eta_{ij}, \quad \mathrm{Re}\,[\,b^i \bar{b}^j\,] = \mathrm{Re}\,[\,\bar{b}^i b^j\,] = -\eta^{ij} \tag{6.4a}$$

となる．一般の複素四元数 $q, p \in \mathbb{H}^c$ (含，複素 Grassmann 四元数) に対しては，

$$\mathrm{Re}\,[\,pq\,] = \begin{cases} +\mathrm{Re}\,[\,qp\,] \qquad (\,[\,q_i, p_j\,] = 0 \text{ のとき}) \\ -\mathrm{Re}\,[qp] \qquad (\,\{\,q_i, p_j\,\} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.4b}$$

$$\mathrm{Re}\,[\,pq\,] = \mathrm{Re}\,[\,\overline{pq}\,] = \begin{cases} +\mathrm{Re}\,[\,\bar{q}\bar{p}\,] \qquad (\,[\,q_i, p_j\,] = 0 \text{ のとき}) \\ -\mathrm{Re}\,[\,\bar{q}\bar{p}\,] \qquad (\,\{\,q_i, p_j\,\} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.4c}$$

が成り立つ．さらに次の公式も有用である．

$$b^i \bar{b}^j b^k + b^k \bar{b}^j b^i = -2\eta^{ij} b^k + 2\eta^{ik} b^j - 2\eta^{jk} b^i \tag{6.5a}$$

$$b^i \bar{b}^j b^k - b^k \bar{b}^j b^i = 2i\varepsilon^{ijkl} b_l \tag{6.5b}$$

$$b^i \bar{b}^j b^k \bar{b}^l = -\eta^{ij} b^k \bar{b}^l + \eta^{ik} b^j \bar{b}^l - \eta^{jk} b^i \bar{b}^l + i\varepsilon^{ijk}{}_m b^m \bar{b}^l \tag{6.5c}$$

$$i\varepsilon^{ijkl} b_k \bar{b}_l = b^i \bar{b}^j - b^j \bar{b}^i \tag{6.5d}$$

ただし，ε^{ijkl} は 4 次元の Levi-Civita のシンボルで，$\varepsilon^{0123} = +1$ と選んでいる．さらに，(6.4a)，(6.5c) により，

$$\mathrm{Re}\,[b^i\bar{b}^j b^k \bar{b}^l + \mathrm{h.c.}] = 2(\eta^{ij}\eta^{kl} - \eta^{ik}\eta^{jl} + \eta^{il}\eta^{jk}) \tag{6.5e}$$

$$\mathrm{Re}\,[b^i\bar{b}^j b^k \bar{b}^l - \mathrm{h.c.}] = -2i\varepsilon^{ijkl} \tag{6.5f}$$

が成り立つ．(4.57) で見たように，Lorentz 変換は単位複素四元数 $U \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ を用いてかける．

$$\Lambda^i{}_j b_i = U b_j U^\dagger, \quad \Lambda^i{}_j = -\mathrm{Re}\,[U b_j U^\dagger \bar{b}^i], \quad \Lambda = (\Lambda^i{}_j) \in L_+^\uparrow \tag{6.5g}$$

さて，以上の記法を使って，前章に現れた代表的な四元数場である，Dirac 場とゲージ場を

$$\psi(x) = b^i \psi_i(x) = b_i \psi^i(x) \tag{6.6a}$$

$$A(x) = b^i A_i(x) = b_i A^i(x) \tag{6.6b}$$

とかく．この章で ψ とかけば，すべて 4.5 節で定義された $SL(1, \mathbb{H}^c)$ スピノルを表し，4 成分 Dirac スピノルではない．両者の関係は四元数カイラル分解 (4.66b) から得られる．ただし，この章の本文では具体的関係式を知らなくても済むので，6.3 節の注でその結果を説明する (四元数 Dirac 理論の 4 成分形式への移行は前章 5.6 節で行った)．(6.6a,b) における x は時空点を連続的にラベルするのに必要な 4 つの独立な実数の組であり，任意の曲線座標系における座標値を表す．そのような座標系に結びついた添字を持たないこれらの場は**座標スカラー場**でなければならない．則ち，一般座標変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x)$ のもとで

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x) \tag{6.7a}$$

$$A(x) \to A'(x') = A(x) \tag{6.7b}$$

と変換する．ただし，$x^{\mu\prime}(x)$ は微分可能な関数で，逆変換 $x^{\mu\prime} \to x^\mu = x^\mu(x')$ の存在を仮定する．b^i は座標によらないから，成分場 $\psi_i(x), A_i(x)$ も座標スカラーである．

$$\psi_i'(x') = \psi_i(x) \tag{6.8a}$$

$$A_i'(x') = A_i(x) \tag{6.8b}$$

特に，Einstein の一般相対性理論では，4 成分スピノル場 $\psi_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ に対する座標スカラー性は $\psi_\alpha'(x') = \psi_\alpha(x)$ とかかれるが，四元数形式では，

(6.8a) のように，(6.8b) と同じラテン添字を使った形式にかけるのが特徴である．それ故，一般に，ラテン添字しか持たない量は，すべて座標スカラーである．しかしながら，等価原理により時空のどの点でも局所 Lorentz 系が選べて，そこでは重力が消去されるので，Lorentz 不変性が成り立つ．したがって，場は決まった Lorentz 変換性をもつ．今の場合，(6.7) の場は Lorentz 変換 (5.40b,d)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U\psi(x) \tag{6.9a}$$

$$A(x) \to A'(x) = UA(x)U^\dagger \tag{6.9b}$$

を受ける．ここで，$U \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ である[1)]．これは，$\psi_i(x)$ が Lorentz スピノル場，$A_i(x)$ が Lorentz ベクトル場であることを意味する．

一般に任意の四元数場は一般座標変換のテンソル添字しか持たない．四元数スカラーなテンソル場を除いて，例えば，Lorentz 変換性から $b^i b^{j\,\dagger}$ を含む場は存在しないので，

$$\varphi^{\mu_1\mu_2\cdots}(x) = b^i \varphi_i{}^{\mu_1\mu_2\cdots}(x), \quad \varphi^{\mu_1\mu_2\cdots}(x) = b^i \bar{b}^j \varphi_{ij}{}^{\mu_1\mu_2\cdots}(x)$$

などの四元数場が考えられる ($\bar{b}^i b^j = (b^j \bar{b}^i)^\dagger$) が，複素四元数の基底 b^i を 3 つ含むもの (例えば，$b^i \bar{b}^j b^k$ のように) は (6.5a,b) を使って 1 つ含むものに，4 つ含むものは (6.5c) を使って，2 つ含むものに変形できる．4 つ以上含むものはもはや独立でない．従って，**座標ベクトル場として変換する四元数場は 3 種類しかない．**

$$b^\mu(x) = b^i b_i{}^\mu(x) \tag{6.10a}$$

$$\psi^\mu(x) = b^i \psi_i{}^\mu(x) \tag{6.10b}$$

$$E^\mu(x) = \frac{1}{4} E^\mu{}_{ij}(x) b^i \bar{b}^j \tag{6.10c}$$

同様に，座標テンソルとして変換する四元数場も 3 種類しかない．(6.10c) の $b^i \bar{b}^j = (b^i \bar{b}^j + b^j \bar{b}^i)/2 + (\bar{b}^i \bar{b}^j - \bar{b}^j \bar{b}^i)/2$ の第 1 項は四元数スカラーな座標ベクトル場に導くことに注意しさえすれば，$\eta^{ij} E^\mu{}_{ij}(x) = 0$ と仮定してよい．これらが座標ベクトル場であるとは，一般座標変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x)$ のもとで，

$$\phi^\mu(x) \to \phi^{\mu\prime}(x') = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \phi^\nu(x), \quad \phi^\mu = b^\mu,\ \psi^\mu,\ E^\mu \tag{6.10d}$$

と変換することを言う．しかしながら，局所 Lorentz 系における Lorentz 変換のもとではすべて異なる変換性を示す．

$$b^\mu(x) \to b'^\mu(x) = Ub^\mu(x)U^\dagger \tag{6.11a}$$

$$\psi^\mu(x) \to \psi'^\mu(x) = U\psi^\mu(x) \tag{6.11b}$$

$$E^\mu(x) \to E'^\mu(x) = UE^\mu(x)\overline{U} \tag{6.11c}$$

(6.11a) は Lorentz ベクトル，(6.11b) は Lorentz スピノル (成分場 ${\psi_i}^\mu$ は座標ベクトルの添字も持っているから，スピン 3/2 の粒子を記述する Rarita-Schwinger 場[2)]である)，(6.11c) は 2 階の Lorentz 反対称テンソルの変換性を示す．特に，座標ベクトル場 $b^\mu(x)$ の成分場に対して，両方の変換性を改めてかくと，

$${b_i}^{\mu\prime}(x') = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}{b_i}^\nu(x), \quad (\text{一般座標変換 } x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^{\mu\prime}(x) \text{ のもとで}) \tag{6.12a}$$

$${b_i}'^\mu(x) = {\Lambda_i}^j{b_j}^\mu(x), \quad (\text{局所 Lorentz 系における Lorentz 変換のもとで}) \tag{6.12b}$$

となる．このような変換性を示す場 ${b_i}^\mu(x)$ の中には**四脚場** (**Vierbein** または **Tetrad**) として知られているものがある．それで，(6.10a) で定義される座標ベクトル場 $b^\mu(x)$ が四脚場 ${b_i}^\mu(x)$ を成分場として持つ場合，それを**四元数四脚場**と呼ぶことにする (そのような性質を持たないが，(6.11a) のように変換する一般の座標ベクトル場 $\varphi^\mu(x) = b^i{\varphi_i}^\mu(x)$ も存在する)．さて，四脚場[3)]とは，

$$b_{i\mu}(x){b_j}^\mu(x) = \eta_{ij} \tag{6.13a}$$

で定義される (Lorentz 計量の意味で直交する単位) ベクトルの 4 つ組で，ラテン添字は η_{ij} で，ギリシャ添字は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ で上げ下げされる (計量テンソルと四脚場あるいは四元数四脚場との関係については次節参照)．(6.12) が成り立てば，(6.13a) は一般座標変換，(局所)Lorentz 変換のもとで不変に保たれる．その場合，(6.12b) の Lorentz 変換のパラメーターは一般に x に依存してよい．それを**局所 Lorentz 変換**と呼び，(6.9)，(6.11) の $U = U(x)$ とおくことに相当する．

四脚場 ${b_i}^\mu(x)$ の逆 ${b^i}_\mu(x)$ を

$$b^i{}_\mu(x) b_j{}^\mu(x) = \delta^i{}_j \tag{6.13b}$$

によって定義すれば，後に出てくる (6.29b) の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて，$b^\mu(x)$ の共変成分は

$$b_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x) b^\nu(x) = b_i b^i{}_\mu(x) \tag{6.14}$$

で定義される．

ところで，物質場としてスピノル場を考えるとき，その重力場との相互作用を記述するには必然的に四脚場が必要になることがよく知られている．その処方箋は四元数形式ではどのようになるだろうか．まず，(5.47) で与えられる自由な Dirac 場のラグランジアンにおける微分演算子は，この節の記号では，

$$\partial \equiv -b^i \partial_i \tag{6.15}$$

とかかれることに注意する．(5.46) は Lorentz 不変であるが，重力場が存在するときは，等価原理を用いて，この Lorentz 不変性を一般座標変換のもとでの不変性に格上げしなければならない．この要請に従って，スピノル場と重力場の相互作用が決まる．それを求めるため，(6.15) の微分演算子を

$$\partial \to D \equiv -b^\mu \partial_\mu \equiv -b^i D_i, \quad D_i = b_i{}^\mu \partial_\mu \tag{6.16}$$

におき換える ($\partial_i = D_i$ とおいて，∂_i を ∂_μ によって定義しているとも見なせる)．ここで，$b^\mu = b^\mu(x)$ は (6.10a) で定義される四元数四脚場である．その結果，$D = D(x)$ は座標スカラーになる．すると，(6.7a) により，$\psi(x)$ が座標スカラーであることから，ラグランジアン $\mathcal{L}_D(\bar{D})$ は一般座標変換のもとで不変なラグランジアンとなる．ただし，一般共変性を満たす作用は，ラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_D(\bar{D}) = b\mathcal{L}_D(\bar{D}), b = \det(b^i{}_\mu)$ の 4 次元積分で与えられる[4)]．

(6.16) で定義される微分演算子 $D_i = b_i{}^\mu \partial_\mu$ の交換子積は T_4 ゲージ場[5)] $e^i{}_\mu(x) = b^i{}_\mu(x) - \delta^i{}_\mu$ の場の強さ $C^k{}_{ij}$ を与える．

$$[D_i, D_j] = -C^k{}_{ij} D_k \tag{6.17a}$$

$$C^k{}_{ij} = b_i{}^\mu b_j{}^\nu (\partial_\mu b^k{}_\nu - \partial_\nu b^k{}_\mu) \tag{6.17b}$$

$$C_{ijk} = \eta_{il} C^l{}_{jk} = b_j{}^\mu b_k{}^\nu (\partial_\mu b_{i\nu} - \partial_\nu b_{i\mu}) \tag{6.17c}$$

定義により，$C^k{}_{ij}$ は 3 階の Lorentz テンソルで，後ろの添字に関して反対称で

ある，$C^k{}_{ji} = -C^k{}_{ij}$．以下では，(6.17c) の C_{ijk} を直接扱うのではなく，**Ricci の回転係数**と呼ばれる次の線形結合

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{jik} - C_{kij}) \tag{6.17d}$$

をとる．これは前の 2 つの添字に関して反対称である，$\Delta_{jik} = -\Delta_{ijk}$．すると，Lorentz 変換を局所化した場合の変換性が簡明になる．

一方，いま $b^\mu(x)$ を四元数四脚場とみなしているので，局所 Lorentz 系における Lorentz 変換 (6.9)，(6.11)，(6.12b) は各時空点 x ごとに独立に選べることは既に述べた．このような局所 Lorentz 変換が許されるとする場合は，(6.9)，(6.11) の $U = U(x) \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ とおくことになる．ラグランジアン $\mathcal{L}_D(\bar{D})$ に現れる場に対して局所 Lorentz 変換は (6.9),(6.11) の $U \to U(x)$ として，

$$\psi'(x) = U(x)\psi(x) \tag{6.18a}$$

$$b'^\mu(x) = U(x)b^\mu(x)U^\dagger(x) \tag{6.18b}$$

となる[6)]．けれども Lorentz 変換を局所化すると，(5.46) から導かれる $\mathcal{L}_D(\bar{D})$ は不変に留まらない．また，(6.17d) で定義される量は，最早，Lorentz テンソルではなくなる．実際，(6.17d) で定義した Δ_{ijk} を用いて，

$$\Delta_\mu \equiv \frac{1}{4}\Delta_{\mu ij}b^i\bar{b}^j, \quad \Delta_{\mu ij} = -\Delta_{\mu ji} = b^k{}_\mu \Delta_{ijk} \tag{6.19a}$$

という四元数座標ベクトル場を定義すると，その局所 Lorentz 変換則は，

$$\Delta'_\mu = \frac{1}{4}\Delta'_{\mu ij}b^i\bar{b}^j = U\Delta_\mu\bar{U} - U\partial_\mu\bar{U} \tag{6.19b}$$

のように，非斉次項を含むことがわかる．それ故，斉次変換則に従うのは，

$$\Delta_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\Delta_\nu - \partial_\nu\Delta_\mu - [\Delta_\mu, \Delta_\nu] \tag{6.19c}$$

$$\Delta'_{\mu\nu} = U\Delta_{\mu\nu}\bar{U} \tag{6.19d}$$

で与えられる．この場合，$\Delta_{\mu\nu}$ の成分場は

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Delta_{\mu\nu ij}b^i\bar{b}^j \tag{6.19e}$$

$$\Delta_{\mu\nu ij} = \partial_\mu\Delta_{\nu ij} - \partial_\nu\Delta_{\mu ij} + \Delta_{\mu ik}\Delta_\nu{}^k{}_{\cdot j} - \Delta_{\nu ik}\Delta_\mu{}^k{}_{\cdot j} = -\Delta_{\mu\nu ji} \tag{6.19f}$$

のように公式 (6.5a) を用いて計算できるが，これは，重力場のラグランジアンを求めるときに必要になる．(6.19b) は

$$\Delta'_{\mu ij} = \Lambda_i{}^k \Lambda_j{}^l \Delta_{\mu kl} + \eta_{kl} \Lambda_i{}^k \partial_\mu \Lambda_j{}^l, \quad \Lambda^i{}_j = \Lambda^i{}_j(x) \in L_+^\uparrow \tag{6.19g}$$

に等しい．この等価性は Lorentz ゲージ場の変換則に出くわしたときに改めて証明する．ここで

は，(6.19g) が (6.17b) の変換則から導かれることをとりあえず見ておく[7]．

(6.19g) の証明

局所 Lorentz 変換のもとでの (6.17b) の変換則は

$$\begin{aligned}
C'_{ijk} &= \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} b_{j'}{}^\mu b_{k'}{}^\nu [\partial_\mu(\Lambda_i{}^{i'} b_{i'\nu}) - \partial_\nu(\Lambda_i{}^{i'} b_{i'\mu})] \\
&= \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} b_{j'}{}^\mu b_{k'}{}^\nu [(\partial_\mu \Lambda_i{}^{i'}) b_{i'\nu} + \Lambda_i{}^{i'} (\partial_\mu b_{i'\nu}) - (\partial_\nu \Lambda_i{}^{i'}) b_{i'\mu} - \Lambda_i{}^{i'} (\partial_\nu b_{i'\mu})] \\
&= \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} (b_{j'}{}^\mu \eta_{k'i'} \partial_\mu \Lambda_i{}^{i'} - b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_i{}^{i'}) + \Lambda_i{}^{i'} \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} C_{i'j'k'}
\end{aligned}$$

である．ゆえに，$\Delta_{ijk}, \Delta_{\mu ij}$ の変換則は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\Delta'_{ijk} &= \frac{1}{2}(C'_{ijk} - C'_{jik} - C'_{kij}) \\
&= \Lambda_i{}^{i'} \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} \Delta_{i'j'k'} + \frac{1}{2}[\Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} (b_{j'}{}^\mu \eta_{k'i'} \partial_\mu \Lambda_i{}^{i'} - b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_i{}^{i'}) \\
&\qquad - (\Lambda_i{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} (b_{j'}{}^\mu \eta_{k'i'} \partial_\mu \Lambda_j{}^{i'} - b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_j{}^{i'}) \\
&\qquad - (\Lambda_i{}^{j'} \Lambda_j{}^{k'} (b_{j'}{}^\mu \eta_{k'i'} \partial_\mu \Lambda_k{}^{i'} - b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_k{}^{i'})]
\end{aligned}$$

ここで，右辺 [$\cdots$] 内は 6 項あるが，第 2 項と第 4 項が等しく，第 1 項と第 6 項，第 3 項と第 5 項がそれぞれ相殺するので

$$\begin{aligned}
&= \Lambda_i{}^{i'} \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} \Delta_{i'j'k'} - \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_i{}^{i'} \\
\Delta'_{\mu ij} &= b'_\mu{}^k \Delta'_{ijk} = \Lambda^k{}_{k''} b_\mu^{k''} \Lambda_i{}^{i'} \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} \Delta_{i'j'k'} - \Lambda^k{}_{k''} b_\mu^{k''} \Lambda_j{}^{j'} \Lambda_k{}^{k'} b_{k'}{}^\nu \eta_{j'i'} \partial_\nu \Lambda_i{}^{i'} \\
&= \Lambda_i{}^{i'} \Lambda_j{}^{j'} \Delta_{\mu i'j'} + \Lambda_i{}^{i'} \eta_{i'j'} \partial_\mu \Lambda_j{}^{j'}
\end{aligned}$$

これが (6.19g)．□

次に，(5.46) から導かれる $\mathcal{L}_D(\bar{D})$ が局所 Lorentz 不変になるために，ゲージ原理によって，$\bar{D}\psi$ がゲージ共変に変換するように Lorentz ゲージ場 A_μ を次のように導入する．

$$D = -b^\mu \partial_\mu \text{ における } \partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu \tag{6.20a}$$

$$\mathcal{D}'_\mu (U\psi) = U(\mathcal{D}_\mu \psi) \tag{6.20b}$$

$$A'_\mu = UA_\mu\bar{U} + U\partial_\mu\bar{U} \tag{6.20c}$$

$\mathcal{D}_\mu$ のことを **Lorentz 共変微分**と呼ぶ ($\mathcal{L}_D(\bar{D})$ には $b^\mu(x)$ の微分が現れないので，その Lorentz 共変微分はあとで改めて定義する)．ところで，$U = U(x) \in SL(1, \mathbb{H}^c)$ なので，$(-\bar{A}_\mu)$ は局所 Lorentz 変換のもとで，A_μ と同じ振る舞いをする．従って，和 $A_\mu + \bar{A}_\mu$ のゲージ変換には非斉次項が現れない．それ故，時空のある点でそれがゼロになったとすると，すべての点でそれはゼロになる．

$$A_\mu + \bar{A}_\mu = 0 \tag{6.21}$$

簡単のためここでは (6.21) を仮定する．その結果，A_μ は座標ベクトルの添字を持つ，2 階の Lorentz 反対称テンソル場として表される．則ち，

$$A_\mu = \frac{1}{4}A_{\mu ij}b^i\bar{b}^j, \quad A_{\mu ij} = -A_{\mu ji} \tag{6.22}$$

とかける．(6.20c) のゲージ変換は成分場 $A_{\mu ij}$ についてかけば，

$$A'_\mu = \frac{1}{4}A'_{\mu ij}b^i\bar{b}^j \tag{6.23a}$$

$$A'_{\mu ij} = \Lambda_i{}^k\Lambda_j{}^l A_{\mu kl} - \eta_{kl}\Lambda_i{}^k\partial_\mu\Lambda_j{}^l, \quad \Lambda^i{}_j = \Lambda^i{}_j(x) \in L_+^\uparrow \tag{6.23b}$$

となる．この変換則から $A_{\mu ij}$ が実場であることがわかる．

(6.23b) の証明

A_μ のゲージ変換則の非斉次項は，丁度 Δ_μ のそれと符号が逆である．それ故，(6.19b) から (6.19g) を証明することは，(6.20c) から (6.23b) を示すことと同じである．(6.20c) の斉次項が (6.23b) の斉次項に等しいことは，$U\bar{U} = 1$ に注意して，$Ub^k\bar{b}^l\bar{U} = Ub^kU^\dagger\bar{U}^\dagger\bar{b}^l\bar{U} = \Lambda_i{}^k\Lambda_j{}^l b^i\bar{b}^j$ となることから直ちに示せる．それ故，非斉次項が互いに等しくなることを示せばよい．$\eta_{ij}b^i\bar{b}^j = -4$ だから，

$$\begin{aligned}
U\partial_\mu\bar{U} &= -\frac{1}{4}\eta_{ij}U(b^i\bar{b}^j)\partial_\mu\bar{U} \\
&= -\frac{1}{4}\eta_{ij}Ub^i(U^\dagger\bar{U}^\dagger)\bar{b}^j\partial_\mu\bar{U} = -\frac{1}{4}\eta_{ij}Ub^iU^\dagger[\partial_\mu(\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U}) - (\partial_\mu\bar{U}^\dagger)\bar{b}^j\bar{U}] \\
&= -\frac{1}{4}\eta_{ij}(Ub^iU^\dagger)\partial_\mu(\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U}) + \frac{1}{4}\eta_{ij}Ub^i(U^\dagger\partial_\mu\bar{U}^\dagger)\bar{b}^j\bar{U} \\
&= -(\partial_\mu U)\bar{U} = \frac{1}{4}\eta_{ij}\partial_\mu(Ub^iU^\dagger)\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U} - \frac{1}{4}\eta_{ij}Ub^i[(\partial_\mu U^\dagger)\bar{U}^\dagger]\bar{b}^j\bar{U}
\end{aligned}$$

従って，

$$U\partial_\mu\bar{U} = \frac{1}{2}[U\partial_\mu\bar{U} - (\partial_\mu U)\bar{U}]$$

$$= -\frac{1}{8}\eta_{ij}[(Ub^iU^\dagger)\partial_\mu(\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U}) - \partial_\mu(Ub^iU^\dagger)\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U}]$$
$$+\frac{1}{8}U\{\eta_{ij}b^i[U^\dagger\partial_\mu\bar{U}^\dagger - (\partial_\mu U^\dagger)\bar{U}^\dagger]\bar{b}^j\}\bar{U}$$

上の第 2 行の [ ] 内は純四元数になるので，{ } は恒等的にゼロになる．第 1 行第 2 項をかき換えて，

$$U\partial_\mu\bar{U} = -\frac{1}{4}\eta_{ij}[(Ub^iU^\dagger)\partial_\mu(\bar{U}^\dagger\bar{b}^j\bar{U}) = -\frac{1}{4}\eta_{ij}(\Lambda_k{}^i\partial_\mu\Lambda_l{}^j)b^k\bar{b}^l$$

これで，(6.20c) は (6.23b) と等価であることが示せた．□

なお，Poincaré ゲージ不変な Dirac の作用 $\boldsymbol{S}_D = \int \boldsymbol{\mathcal{L}}_D(\bar{\mathcal{D}} \equiv -\bar{b}^\mu\mathcal{D}_\mu)d^4x$，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_D = b\mathcal{L}_D, b = \det(b^i{}_\mu)$ から導かれる Poincaré ゲージ不変な Dirac 方程式を求めておく．

$$\bar{D}\psi + \frac{1}{2}\bar{V}\psi + \frac{1}{2}(\bar{A}^\dagger - \bar{A})\psi + im\bar{\psi}^\dagger b_3 = 0 \qquad (6.24)$$

ただし，

$$\bar{V} = \bar{b}^iV_i, \quad V_i \equiv -b^{-1}\partial_\mu(bb_i{}^\mu) \qquad (6.25a)$$

$$\bar{A} = \bar{b}^iA_i, \quad A_i \equiv b_i{}^\mu A_\mu \qquad (6.25b)$$

である．ここで，特殊相対論の極限を取ると，$A_\mu = 0$ で，$b_i{}^\mu = \delta_i{}^\mu, b = 1$ となり，(6.24) は (5.48) を再現する．

6.2 4 次元時空構造の四元数記述

ところで (6.1f) 左の式両辺に $b_i{}^\mu b_j{}^\nu$ をかけ (以下このように表現して，i, j についての和を取ることも意味する)，(6.10a) の定義を使えば，

$$b^\mu(x)\bar{b}^\nu(x) + b^\nu(x)\bar{b}^\mu(x) = -2g^{\mu\nu}(x) \qquad (6.26a)$$

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{ij}b_i{}^\mu(x)b_j{}^\nu(x) \qquad (6.26b)$$

を得る．$b^\mu(x)$ と同じ変換則に従う四元数座標ベクトル場に対しても，これと同様の定義式を与えることができるが，いまは $b^\mu(x)$ を四元数四脚場，従って，$b_i{}^\mu(x)$ は四脚場と仮定しているので，(6.26b) は丁度計量テンソル (の反変成分) を四脚場で表すよく知られた式になっている．実際，(6.26a) の $g^{\mu\nu}(x)$ は対称な

2 階反変テンソルとして変換することは，(6.10d) から直ちに示せる．$g^{\mu\nu}(x)$ が (四元数の単位元に比例する) 四元数スカラー場であるから，Lorentz 変換 (6.11) は (6.18) のように局所化できる．その上，$g^{\mu\nu}(x)$ を任意の四元数場に掛けるとき，左から掛けても右からかけても作用の結果に変わりはない．その共変成分を

$$g_{\mu\nu}(x)g^{\nu\rho}(x) = \delta_{\mu}{}^{\rho} \tag{6.27}$$

によって定義すれば，(6.26a) は

$$b_\mu(x)\bar{b}_\nu(x) + b_\nu(x)\bar{b}_\mu(x) = -2g_{\mu\nu}(x) \tag{6.28}$$

になる．ただし，

$$b_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x)b^\nu(x), \quad b^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)b_\nu(x) \tag{6.29a}$$

によってギリシャ添字の上げ下げを定義する．それ故，よく知られた公式

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ij}b^i{}_\mu(x)b^j{}_\nu(x) \tag{6.29b}$$

が成り立つ[8]．計量テンソルの定義 (6.26), (6.28) により，(6.9), (6.11) の Lorentz 変換は，(6.18) のように時空点の関数と考えてもよい．これが局所 Lorentz 変換というものであった．

時空の無限小離れた 2 点間の座標差 dx^μ は座標ベクトルであるから，$g_{\mu\nu}(x)$ の変換性から，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{6.30}$$

は一般座標変換のもとで不変である．等価原理により，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は重力場を表す．時空点 x で局所 Lorentz 系を選び，重力の作用をその点を含む無限小領域で消去すると，$g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu}$ となり，(6.30) は Minkowski 時空における無限小世界距離の自乗になる．ここで，ベクトルの無限小平行移動を定義しよう．今，任意の時空点 x にあるベクトル $V_\mu(x)$ をその近傍にある点 $x + dx$ まで無限小平行移動 $V_\mu(x) \to V_\mu(x) + dV_\mu(x)$ させるとは，

$$dV_\mu(x) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)V_\lambda(x)dx^\nu \tag{6.31a}$$

であることとする．ここで，$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ は位置 x のみの関数で，平行移動されるベクトルや dx^ν には無関係とする．このような関数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ を**接続係数**と呼ぶ．このとき，座標ベクトル場 $V_\mu(x)$ の共変的な変化量は，$V_\mu(x + dx)$ から $V_\mu(x) +$

$dV_\mu(x)$ を引いたものとして定義されるので，dx^ν に比例するが，その比例係数を**共変微分**と呼び，

$$\nabla_\nu V_\mu \equiv V_{\mu;\nu} = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda \tag{6.31b}$$

とかく．これが座標テンソルとして変換することから，逆に接続係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ の変換性が決まる．共変微分の交換子積から**曲率テンソル**が定義される．

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda \equiv R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V^\rho \tag{6.31c}$$

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}(\,\Gamma\,) = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\tau\mu}\Gamma^\tau_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\tau\nu}\Gamma^\tau_{\rho\mu} \tag{6.31d}$$

これから，**Ricci テンソル**，**スカラー曲率**がいつものように

$$R_{\mu\nu}(\,\Gamma\,) = R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda}(\,\Gamma\,) \tag{6.31e}$$

$$R(\,\Gamma\,) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\,\Gamma\,) \tag{6.31f}$$

と定義される．なお，この本では，曲率テンソルは接続係数に依存して定義されることを明確に示すように，(6.31d,e,f) のような書き方を採用する．なぜなら，接続係数が下の添字について対称な **Riemann 空間** R_4 とは異なる空間も考察の対象にするからである．

接続係数を与えれば，(6.31a) により，ベクトルの無限小平行移動が定義されるが，逆にベクトルの無限小平行移動を別の幾何学の法則に従って与えれば，特定の接続係数が決まる．Einstein が重力と電磁気学の統一を目指して提案したベクトルの無限小平行移動は，その局所 Lorentz 系で見た成分が変わらないとする．則ち，

$$dV_i = 0 \tag{6.31g}$$

によって，ベクトルの平行移動を定義する[9]．この場合は，$V_\mu(x) = b^i{}_\mu(x) V_i(x)$ に対して，

$$dV_\mu(x) = [b_i{}^\lambda(x) \partial_\nu b^i{}_\mu(x)] V_\lambda(x) dx^\nu \equiv \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}(x) V_\lambda(x) dx^\nu \tag{6.31h}$$

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}(x) = b_i{}^\lambda(x) \partial_\nu b^i{}_\mu(x) \tag{6.31i}$$

となる．接続係数 (6.31i) は下の添字について反対称な成分を持つが，簡単な計算から，

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}(\,\Gamma^*\,) = 0 \tag{6.31j}$$

となることがわかる．曲率ゼロ，従って，ベクトルの遠隔平行性が定義されたこのような空間を **Weitzenböck 時空** A_4 という．これにもとづく重力の理論が**遠隔平行性に基づく重力理論の四脚場形式**である[10)]．以下では，接続係数は下の添字に関して必ずしも対称ではないとする．

さて，ベクトルの平行移動は定義されたが，その大きさが平行移動によって変化する可能性もある．いま，ベクトルを平行移動しても大きさは変わらないことを要請する．則ち，無限小平行移動 $V_\mu(x) \to V_\mu(x) + dV_\mu(x)$ に対して，$d(\,V_\mu(x)V^\mu(x)\,) = 0$ を要請する．すると，(6.31a,b) に対応して，

$$dV^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu}(x)V^\lambda(x)dx^\nu \tag{6.32a}$$

$$\nabla_\nu V^\mu \equiv V^\mu{}_{;\nu} = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}V^\lambda \tag{6.32b}$$

が成り立つ．ベクトルの大きさは定義により $V^\mu V_\mu = g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ であるから，無限小平行移動によりベクトルの大きさが変わらないという要請は

$$g_{\mu\nu}(x+dx)(\,V^\mu(x) + dV^\mu(x)\,)(\,V^\nu(x) + dV^\nu(x)\,) = g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x) \tag{6.33a}$$

を与える[11)]．ここに (6.32a) を代入して，

$$g_{\mu\nu;\lambda} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}(x)g_{\rho\nu}(x) - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}(x)g_{\mu\rho}(x) = 0 \tag{6.33b}$$

を得る．これを**計量条件**という．四元数形式では，計量は (6.28) によって四元数四脚場 $b_\mu(x)$ で与えられるから，計量条件は

$$(b_\mu\bar{b}_\nu + b_\nu\bar{b}_\mu)_{;\lambda} = 0 \tag{6.34}$$

となる．共変微分の線形性を使って，計量条件は

$$b_{\mu;\lambda}\bar{b}_\nu + b_\mu\bar{b}_{\nu;\lambda} + (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \tag{6.35}$$

となるが，この方程式の解は

$$b_{\mu;\nu} = -(A_\nu b_\mu + b_\mu A^\dagger_\nu) \tag{6.36}$$

で与えられる．ここで，A_μ は前節で導入した Lorentz ゲージ場である．これ

を証明するために，(6.35) に現れる $b_\mu(x)$ の共変微分は $A_\mu(x)=0$ の極限で (6.31b) で定義されるものと一致しなければならないので，エルミート性，座標テンソル性から，a を任意の実数として，$b_{\mu;\nu}=a(A_\nu b_\mu+b_\mu A_\nu^\dagger)$ とおけることを利用する．これを (6.36) の代わりに，(6.35) に代入すると，a を除いて，

$$(A_\lambda b_\mu+b_\mu A_\lambda^\dagger)\bar{b}_\nu+b_\mu\overline{(A_\lambda b_\nu+b_\nu A_\lambda^\dagger)}+(\mu\leftrightarrow\nu)=0$$

となる．これが成り立つことは，(6.28) と $A_\mu+\bar{A}_\mu=0$ を使えば容易に確かめられる．ところが，$b_{\mu;\nu}=a(A_\nu b_\mu+b_\mu A_\nu^\dagger)$ の両辺が同じ局所 Lorentz 変換性を示すには，$a=-1$ でなければならないことがわかる．

前に $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノル場に対する Lorentz 共変微分が (6.20) で与えられることを見た．四元数ベクトル場 b_μ に対する Lorentz 共変微分は

$$b_{\mu||\nu}\equiv\partial_\nu b_\mu+A_\nu b_\mu+b_\mu A_\nu^\dagger \tag{6.37}$$

である．座標共変微分 (6.31b) とあわせた

$$b_{\mu|\nu}\equiv b_{\mu;\nu}+A_\nu b_\mu+b_\mu A_\nu^\dagger \tag{6.38}$$

を **Poincaré ゲージ共変微分**と呼ぶ．定義により，Poincaré ゲージ共変微分は局所 Lorentz 変換のもとで共変に変換する．従って，b_μ **に対する計量条件** は

$$b_{\mu|\nu}=\partial_\nu b_\mu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}b_\lambda+A_\nu b_\mu+b_\mu A_\nu^\dagger=0 \tag{6.39}$$

となる．ところが，$b_{\mu;\nu}=\partial_\nu b_\mu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}b_\lambda$ はテンソルであるから，上式はテンソル量の間の関係をつけている．このテンソル性を明確にするためには，接続係数の非テンソル部分を分離する必要がある．すなわち，接続係数を **Christoffel シンボル**と**コントーション・テンソル**と呼ばれる部分に分ける．

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{Bmatrix}+K^\lambda{}_{\cdot\,\mu\nu} \tag{6.40a}$$

ただし，

$$\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}+\partial_\nu g_{\mu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{6.40b}$$

は Christoffel シンボルであり，コントーション・テンソルは

$$K^{\lambda}_{\cdot\ \mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\lambda}_{\cdot\ \mu\nu} - T_{\mu\ \cdot\ \nu}^{\ \lambda} - T_{\nu\ \cdot\ \mu}^{\ \lambda}) \tag{6.40c}$$

$$T^{\lambda}_{\cdot\ \mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \tag{6.40d}$$

のように接続係数の下の添字について反対称な成分である**捩率テンソル** $T^{\lambda}_{\cdot\ \mu\nu}$ で与えられる．(6.40) は計量テンソルの計量条件 (6.33b) から導かれる．

(6.40) の証明

念のため (6.40) を証明しておく．計量条件 (6.33b) を $g_{\mu\nu;\lambda}=0, g_{\nu\lambda;\mu}=0, g_{\lambda\mu;\nu}=0$ の順にかくと，

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\rho\mu} = 0 \tag{6.41a}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} = 0 \tag{6.41b}$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} = 0 \tag{6.41c}$$

となる．ここで，−(6.41a)+(6.41b)+(6.41c) を作ると，

$$(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}) + (\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) g_{\rho\nu} + (\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}) g_{\rho\mu} - (\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) g_{\rho\lambda} \\ = 0$$

となる．この式に $(1/2)g^{\sigma\lambda}$ をかけると，(6.40b,d) の記号を使って，

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix} - (1/2)T_{\nu\ \cdot\mu}^{\ \sigma} - (1/2)T_{\mu\ \cdot\nu}^{\ \sigma} - (1/2)(\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) = 0$$

それ故，(6.40c) の定義を用いて，

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) \\ &= \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}(T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} - T_{\mu\ \cdot\nu}^{\ \lambda} - T_{\nu\ \cdot\mu}^{\ \lambda}) = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix} + K^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} \end{aligned}$$

を得る．□

ところが，(6.19a) の定義を使って，

$$\Delta^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = b^{i\lambda} b^{j}_{\ \ \mu} \Delta_{\nu ij} \tag{6.42}$$

とおくと，(6.31h,i) で出てきた，遠隔平行性の条件を満たす接続係数は

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = b_i^{\ \lambda} \partial_\nu b^{i}_{\ \ \mu} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix} - \Delta^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} \tag{6.43}$$

とかけることが容易に示せる．

(6.43) の証明

$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}$ の定義 (6.31i) により,

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} \equiv b_i{}^{\lambda}\partial_\nu b^i{}_\mu = \frac{1}{2}b^{i\lambda}(\partial_\nu b_{i\mu} - \partial_\mu b_{i\nu}) + \frac{1}{2}b^{i\lambda}(\partial_\nu b_{i\mu} + \partial_\mu b_{i\nu})$$

とかき直せる. (6.40b) で与えられる Christoffel シンボルは次のように四脚場を用いてかき直せる.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\\
&= \frac{1}{2}b^{i\lambda}b_i{}^{\sigma}[\partial_\mu(b_{j\sigma}b^j{}_\nu) + \partial_\nu(b_{j\mu}b^j{}_\sigma) - \partial_\sigma(b_{j\mu}b^j{}_\nu)]\\
&= \frac{1}{2}b^{i\lambda}(\partial_\mu b_{i\nu} + \partial_\nu b_{i\mu}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}[(\partial_\mu b_{i\sigma} - \partial_\sigma b_{i\mu})b^i{}_\nu + (\partial_\nu b_{i\sigma} - \partial_\sigma b_{i\nu})b^i{}_\mu]
\end{aligned}$$

それ故, $\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}$ に対する上式の第 2 項を Christoffel シンボルで表すことができる.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{matrix}\right\} &+ \frac{1}{2}b^{i\lambda}(\partial_\nu b_{i\mu} - \partial_\mu b_{i\nu}) - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}b^i{}_\nu(\partial_\mu b_{i\sigma} - \partial_\sigma b_{i\mu})\\
&- \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}b^i{}_\mu(\partial_\nu b_{i\sigma} - \partial_\sigma b_{i\nu})
\end{aligned}$$

ここで, (6.17c) の定義から得られる

$$\partial_\mu b_{i\nu} - \partial_\nu b_{i\mu} = b^j{}_\mu b^k{}_\nu C_{ijk}$$

を上式の第 2,3,4 項に用いれば

$$\begin{aligned}
\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} - \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}b^{i\lambda}b^j{}_\nu b^k{}_\mu C_{ijk} - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}b^i{}_\nu b^{j\mu}b^k{}_\sigma C_{ijk} - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}b^i{}_\mu b^j{}_\nu b^k{}_\sigma C_{ijk}\\
&= \frac{1}{2}b^{i\lambda}b^j{}_\nu b^k{}_\mu(C_{ijk} - C_{jki} - C_{kji}) = \frac{1}{2}b^{i\lambda}b^j{}_\mu b^k{}_\nu(C_{ikj} - C_{kji} - C_{jki})\\
&= \frac{1}{2}b^{i\lambda}b^j{}_\mu b^k{}_\nu(-C_{ijk} + C_{kij} + C_{jik}) = -b^{i\lambda}b^j{}_\mu b^k{}_\nu \Delta_{ijk} = -b^{i\lambda}b^j{}_\mu \Delta_{\nu ij}
\end{aligned}$$

ここで, C_{ijk} が後ろの 2 つの添字に関して反対称であることと Ricci の回転係数の定義 (6.17d) および (6.19a) を使った. 最後に定義 (6.42) により, (6.43) が証明された. □

これを (6.39) に使うとき, (6.40a) に注意すると,

$$b_{\mu;\nu} = \partial_\nu b_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}b_\lambda = b^i b_{i\lambda}\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} - \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\ \ \nu\end{matrix}\right\} b_\lambda - K^\lambda{}_{\mu\nu}b_\lambda = -b_\lambda(\Delta^\lambda{}_{\cdot\mu\nu} + K^\lambda{}_{\cdot\mu\nu})$$

だから, b_μ に対する計量条件 (6.39) は

$$b_{\mu|\nu} = -b_\lambda(\Delta^\lambda{}_{\cdot\mu\nu} + K^\lambda{}_{\cdot\mu\nu}) + A_\nu b_\mu + b_\mu A^\dagger_\nu = 0 \tag{6.44}$$

とかける．これは確かにテンソル方程式である．ここで，(6.40c) から (6.42) と同じように，

$$K_\mu = \frac{1}{4}K_{\mu ij}b^i\bar{b}^j, \quad K_{\mu ij} = b_{i\lambda}b_j{}^\nu K^\lambda{}_{\nu\mu}, \quad K_{\mu ji} = -K_{\mu ij} \tag{6.45}$$

と定義すると，(6.44) は Δ_μ, K_μ, A_μ の間の関係を与える．この関係を求めるため，一般に

$$f_\mu = \frac{1}{4}f_{\mu ij}b^i\bar{b}^j, \quad f_{\mu ij} = -f_{\mu ji} \tag{6.46a}$$

に対して，

$$f_\mu b_\nu + b_\nu f^\dagger_\mu = -f_{\lambda\nu\mu}b^\lambda, \quad f_{\nu\lambda\mu} = b^i{}_\nu b^j{}_\lambda f_{\mu ij} \tag{6.46b}$$

が成り立つことに注意する．これは公式 (6.5a) の簡単な応用である．それ故，(6.44) は

$$(\Delta_\nu + K_\nu + A_\nu)b_\mu + b_\mu(\Delta_\nu + K_\nu + A_\nu)^\dagger = 0 \tag{6.47}$$

となり，結局四元数座標ベクトル場の間の関係式

$$K_\mu = -\Delta_\mu - A_\mu \tag{6.48}$$

が b_μ に対する計量条件の解になる．局所 Lorentz 変換に対する Δ_μ と A_μ の変換則 (6.19b) および (6.20c) により，コントーション・テンソルから作られる四元数座標ベクトル場は局所 Lorentz 変換のもとで共変に変換する．

$$K'_\mu = UK_\mu\bar{U} \tag{6.49}$$

従って，$K_\mu = 0$ のケースも起こりうる．(6.40c,d) から明らかなように，コントーション・テンソルがゼロの場合は，捩率がゼロの場合に実現し，接続係数は下の添字について対称な Chirstoffel シンボルで与えられるので，空間は Riemann 空間になる．四脚場にもとづいて，局所 Lorentz 変換を考えると，(6.48) から，$K_\mu = 0$ は $\Delta_\mu + A_\mu = 0$ を意味する．つまり，$A_\mu = -\Delta_\mu$ のとき，四脚場を通して Riemann 空間を再現するのである．

なお，(6.48) を満たす Lorentz ゲージ場 A_μ の (6.22) で定義される成分場

$A_{\mu ij}$ のことを**スピン接続**といい，普通 $-\omega_{\mu ij}$ という記号が使われる．実際，(6.40a) を使って，まずコントーションテンソルを消去し，のち (6.43) を用いて Christoffel シンボルを消去すれば，

$$\begin{aligned} A_{\mu ij} &= -(K_{\mu ij} + \Delta_{\mu ij}) = -b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} + b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \ \ \nu \end{Bmatrix} - \Delta_{\mu ij} \\ &= -b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} + b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} (b_k{}^{\lambda} \partial_\mu b^k{}_{\nu} + \Delta^{\lambda}_{\cdot}{}_{\nu\mu}) - \Delta_{\mu ij} \\ &= -b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} + b_j{}^{\nu} \partial_\mu b_{i\nu} + \Delta_{\mu ij} - \Delta_{\mu ij} \\ &= b_j{}^{\nu} \partial_\mu b_{i\nu} - b_{i\lambda} b_j{}^{\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} = b_j{}^{\nu} b_{i\nu;\mu} \end{aligned} \tag{6.50}$$

となるが，これは $\omega_{\mu ji} = -\omega_{\mu ij}$ とかかれるスピン接続に他ならない．公式 (6.46) を用いると，四脚場 $b^i{}_\mu$ に対する Lorentz 共変微分 (6.37) はスピン接続を用いて

$$b^i{}_{\mu||\nu} = \partial_\nu b^i{}_\mu + \omega_\nu{}^i{}_{\cdot j} b^j{}_\mu$$

とかける．けれども，この本ではスピン接続という用語は使わない．単に Lorentz ゲージ場 A_μ という呼称を使う．そして，(それ自身はゲージ場でないが便宜上ゲージ場とみなす) b^μ と A_μ は $T_4 \otimes L_{int}$ という直積ゲージ対称群に付随するゲージ場であるという立場に立って，独立に変分する (いわゆる 1 階方式に対応する．1 階方式を採用する理由は，以下で与える重力場のラグランジアンが理論形式の必然として b^μ と A_μ を自然に含むからであり，捩率のあるなしには関係しない)．

Lorentz ゲージ場から作られる場の強さは

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = \frac{1}{4} F_{\mu\nu ij} b^i \bar{b}^j \tag{6.51a}$$

$$F_{\mu\nu ij} = \partial_\mu A_{\nu ij} - \partial_\nu A_{\mu ij} - A_{\mu ki} A_{\nu jl} \eta^{kl} + A_{\mu il} A_{\nu kj} \eta^{lk} \tag{6.51b}$$

である．場の強さ $F_{\mu\nu}$ は，一般座標変換のもとで，反対称テンソルとして振る舞うが，局所 Lorentz 変換のもとでは，(6.20c) から，

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} \bar{U} \tag{6.52}$$

のように変換することがわかる．従って，A_μ は Yang-Mills 場，$F_{\mu\nu}$ はその強

さと見なせるが，(四元数) 四脚場の存在のため，座標スカラー，Lorentz スカラーなラグランジアンとして

$$\mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}) = a\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}b^{\mu}\bar{b}^{\nu} + \mathrm{h.c.}] \tag{6.53}$$

のような，場の強さに比例する項が存在する．条件 (6.48) のため，

$$F_{\mu\nu} = -K_{\mu\nu} - \varDelta_{\mu\nu} \tag{6.54a}$$

$$K_{\mu\nu} = \partial_{\mu}K_{\nu} - \partial_{\nu}K_{\mu} - [\varDelta_{\mu}, K_{\nu}] - [K_{\mu}, \varDelta_{\nu}] - [K_{\mu}, K_{\nu}] \tag{6.54b}$$

が成り立つことに注意する．ただし，$\varDelta_{\mu\nu}$ は (6.19c) で与えられる．

比例定数 a を決めるため，Riemann 空間では捩率がゼロ，従って，$K_{\mu} = 0$ である[12]ことを使う．このとき，$K_{\mu\nu} = 0$ であるから，

$$\mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}|_{K_{\mu}=0}) = -a\mathrm{Re}\,[\varDelta_{\mu\nu}b^{\mu}\bar{b}^{\nu} + \mathrm{h.c.}] \tag{6.55}$$

を得る．ところが，(6.31j) で見たように，$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}(\varGamma^{*}) = 0$ であるから，(6.43) に注意すれば，$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}(\{\,\} - \varDelta) = 0$ を得る．この式から，

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu ij}(\{\,\}) &\equiv b_{i\lambda}b_{j}{}^{\rho}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}(\{\,\}) \\ &= \partial_{\mu}\varDelta_{\nu ij} - \partial_{\nu}\varDelta_{\mu ij} + \varDelta_{\mu ik}\varDelta_{\nu}{}^{k}{}_{j} - \varDelta_{\nu ik}\varDelta_{\mu}{}^{k}{}_{j} \end{aligned} \tag{6.56}$$

となることがわかる．これから，

$$\widehat{R}_{\mu\nu}(\{\,\}) \equiv \frac{1}{4}R_{\mu\nu ij}(\{\,\})b^{i}\bar{b}^{j} = \varDelta_{\mu\nu} \tag{6.57}$$

が示せる．ここで，(6.19e,f) を使った．それ故，(6.55) は

$$\mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}|_{K_{\mu}=0}) = -a\mathrm{Re}\,[\widehat{R}_{\mu\nu}(\{\,\})b^{\mu}\bar{b}^{\nu} + \mathrm{h.c.}] \tag{6.58}$$

で与えられる．これは，$a = (2\kappa)^{-1}$，κ は Einstein の重力定数，のとき，Einstein-Hilbert のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{E\text{-}H} = -\frac{1}{2\kappa}R(\{\,\}) \tag{6.59}$$

に一致する (ラグランジアン密度は，$\sqrt{-g} = b$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ をかけて得られる)．

(6.56) の証明

この結果は古くからよく知られている．ここでは，直接導く代わりに，$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}(\{\,\} - \varDelta) = 0$ から証明する道を選ぶ．(6.31d) の定義から

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}(\{\ \} - \Delta) = \partial_\mu \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho\ \ \nu \end{Bmatrix} - \partial_\nu \begin{Bmatrix} \lambda \\ \rho\ \ \mu \end{Bmatrix} - \partial_\mu \Delta^\lambda_{\cdot\rho\nu} + \partial_\nu \Delta^\lambda_{\cdot\rho\mu}$$
$$+ \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} - \Delta^\lambda_{\cdot\tau\mu} \right)\left(\begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} - \Delta^\tau_{\cdot\rho\nu} \right) - \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} - \Delta^\lambda_{\cdot\tau\nu} \right)$$
$$\times \left(\begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix} - \Delta^\tau_{\cdot\rho\mu} \right) = 0$$

となるので，

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}(\{\ \}) = X^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$
$$X^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Delta^\lambda_{\cdot\rho\nu} - \partial_\nu \Delta^\lambda_{\cdot\rho\mu} - \Delta^\lambda_{\cdot\tau\mu}\Delta^\tau_{\cdot\rho\nu} + \Delta^\lambda_{\cdot\tau\nu}\Delta^\tau_{\cdot\rho\mu}$$
$$+ \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} \Delta^\tau_{\cdot\rho\nu} + \Delta^\lambda_{\cdot\tau\mu} \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} \Delta^\tau_{\cdot\rho\mu} - \Delta^\lambda_{\cdot\tau\nu} \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix}$$

ここで，(6.42) の定義を使って X の最初の 4 項をかき直すと，

$$X^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = b^{k\lambda} b^l{}_\rho \left\{ \partial_\mu \Delta_{\nu kl} - \partial_\nu \Delta_{\mu kl} - \Delta_{\mu k\cdot}^{\ \ \ k'} \Delta_{\nu k' l} + \Delta_{\nu k\cdot}^{\ \ \ k'} \Delta_{\mu k' l} \right\} + Y^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$
$$Y^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu (b^{k\lambda} b^l{}_\rho) \Delta_{\nu kl} - \partial_\nu (b^{k\lambda} b^l{}_\rho) \Delta_{\mu kl}$$
$$+ \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} \Delta^\tau_{\cdot\rho\nu} + \Delta^\lambda_{\cdot\tau\mu} \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} \Delta^\tau_{\cdot\rho\mu} - \Delta^\lambda_{\cdot\tau\nu} \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix}$$
$$= \Delta_{\nu kl} \left\{ \partial_\mu (b^{k\lambda} b^l{}_\rho) + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} b^{k\tau} b^l{}_\rho - \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix} b^{k\lambda} b^l{}_\tau \right\}$$
$$- \Delta_{\mu kl} \left\{ \partial_\nu (b^{k\lambda} b^l{}_\rho) - \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} b^{k\lambda} b^l{}_\tau + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} b^{k\tau} b^l{}_\rho \right\}$$

従って，

$$b_{i\lambda} b_j{}^\rho X^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$
$$= \left\{ \partial_\mu \Delta_{\nu ij} - \partial_\nu \Delta_{\mu ij} - \Delta_{\mu i\cdot}^{\ \ \ k'} \Delta_{\nu k' j} + \Delta_{\nu i\cdot}^{\ \ \ k'} \Delta_{\mu k' j} \right\} + b_{i\lambda} b_j{}^\rho Y^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$
$$b_{i\lambda} b_j{}^\rho Y^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$$
$$= \Delta_{\nu kl} \Bigg(b_{i\lambda} (\partial_\mu b^{k\lambda}) \delta^l{}_j + \delta_i{}^k b_j{}^\rho (\partial_\mu b^l{}_\rho)$$
$$+ b_{i\lambda} b^{k\tau} \delta^l{}_j \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} - b_j{}^\rho b^l{}_\tau \delta_i{}^k \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix} \Bigg)$$
$$- \Delta_{\mu kl} \Bigg(b_{i\lambda} (\partial_\nu b^{k\lambda}) \delta^l{}_j + \delta_i{}^k b_j{}^\rho (\partial_\nu b^l{}_\rho)$$

$$
- \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} + \delta_j{}^l b_{i\lambda} b^{k\tau} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix} \Bigg)
$$

$$
= \Delta_{\nu kl} \Bigg(-b_{i\tau} \Gamma^{*\tau}_{\lambda\mu} b^{k\lambda} \delta^l{}_j + b_{i\lambda} b^{k\tau} \delta^l{}_j \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix}
$$

$$
+ \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \Gamma^{*\tau}_{\rho\mu} - \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix} \Bigg)
$$

$$
- \Delta_{\mu kl} \Bigg(-\delta^l{}_j b_{i\tau} \Gamma^{*\tau}_{\lambda\nu} b^{k\lambda} + \delta_j{}^l b_{i\lambda} b^{k\tau} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \nu \end{Bmatrix}
$$

$$
+ \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \Gamma^{*\tau}_{\rho\nu} - \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} \Bigg)
$$

$$
= \Delta_{\nu kl} \left[-b_{i\lambda} b^{k\tau} \delta^l{}_j \left(\Gamma^{*\lambda}_{\tau\mu} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \tau\ \mu \end{Bmatrix} \right) + \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \left(\Gamma^{*\tau}_{\rho\mu} - \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \mu \end{Bmatrix} \right) \right]
$$

$$
- \Delta_{\mu kl} \left[-\delta^l{}_j b_{i\tau} b^{k\lambda} \left(\Gamma^{*\tau}_{\lambda\nu} - \begin{Bmatrix} \tau \\ \lambda\ \nu \end{Bmatrix} \right) + \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \left(\Gamma^{*\tau}_{\rho\nu} - \begin{Bmatrix} \tau \\ \rho\ \nu \end{Bmatrix} \right) \right]
$$

ここで (6.43) を用いて

$$
= \Delta_{\nu kl} \left[b_{i\lambda} b^{k\tau} \delta^l{}_j \Delta^{\lambda}_{\cdot\,\tau\mu} - \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \Delta^{\tau}_{\cdot\,\rho\mu} \right]
$$

$$
+ \Delta_{\mu kl} \left[-\delta^l{}_j b_{i\tau} b^{k\lambda} \Delta^{\tau}_{\cdot\,\lambda\nu} + \delta_i{}^k b_j{}^\rho b^l{}_\tau \Delta^{\tau}_{\cdot\,\rho\nu} \right]
$$

$$
= \Delta_{\nu kj} \Delta_{\mu i\cdot}{}^{k} - \Delta_{\nu il} \Delta_{\mu}{}^{l}{}_{\cdot j} - \Delta_{\mu kj} \Delta_{\nu i\cdot}{}^{k} + \Delta_{\mu il} \Delta_{\nu}{}^{l}{}_{\cdot j} = 2\Delta_{\mu ik} \Delta_{\nu}{}^{k}{}_{\cdot j} - 2\Delta_{\nu ik} \Delta_{\mu}{}^{k}{}_{\cdot j}
$$

これは $b_{i\lambda} b_j{}^\rho X^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ の $\{\cdots\}$ 内の項で，Δ の 2 次の項の符号を変えて Y の項を落とせばよいことを意味する．すなわち

$$
b_{i\lambda} b_j{}^\rho X^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Delta_{\nu ij} - \partial_\nu \Delta_{\mu ij} + \Delta_{\mu i\cdot}{}^{k} \Delta_{\nu kj} - \Delta_{\nu i\cdot}{}^{k} \Delta_{\mu kj}
$$

このようにして (6.56) が証明された．□

今度は，Weitzenböck 時空 A_4 における重力場の最も簡単なラグランジアンを探そう．この場合は， Lorentz 変換は大域的とみなされ，極限 $A_\mu = 0$ に対応するから，(6.53) は恒等的にゼロになる．そのため，(6.53) とは異なる形の重力場のラグランジアンが存在しなければならない．それを求めるため，(6.54), (6.57) を使うと，(6.53) は恒等的に

$$\mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{E\text{-}H} + 2a\mathrm{Re}\left[K_\mu K^\mu + K_\mu K_\nu b^\mu b^\nu + \mathrm{h.c.}\right] + b^{-1}(\text{発散項}) \tag{6.60}$$

となることに注意する．今，K_μ は (6.49) のように変換するので，捩率の場の強さとみなすことにすれば，その 2 次形式で最も一般的なラグランジアンは，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を任意の実定数として，

$$\mathcal{L}^{(1)}(K_\mu) = \mathrm{Re}\left[\alpha_1 K_\mu K^\mu + \alpha_2 K_\mu b^\mu K_\nu^\dagger \bar{b}^\nu + \alpha_3 K_\mu K_\nu b^\mu \bar{b}^\nu + \mathrm{h.c.}\right] \tag{6.61}$$

である．そこで，重力場のラグランジアンとして，(6.53) と (6.61) を加えたものをとる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G^{(0)} &= \mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}^{(1)}(K_\mu) \\ &= \mathcal{L}_{E\text{-}H} + \mathrm{Re}\left[(\alpha_1 + 2a)K_\mu K^\mu + \alpha_2 K_\mu b^\mu K_\nu^\dagger \bar{b}^\nu \right. \\ &\qquad \left. + (\alpha_3 + 2a) K_\mu K_\nu b^\mu \bar{b}^\nu + \mathrm{h.c.}\right]\end{aligned} \tag{6.62}$$

一般に A_μ がゼロでない場合の K_μ を用いたこのラグランジアンは Hayashi-Bregman [13)]が採用した重力場のラグランジアンに等しいことが示される (今は $A_\mu = 0$ の場合を考えているが)．そこで，任意に取れる結合定数として，$\alpha_1 = -2a, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -2a$ と選べば Einstein-Hilbert のラグランジアンを再現する．ただし，捩率しか存在しないので，例えば，スピン 1/2 の物質場のラグランジアンから捩率の源を得るとする．また，重力場の方程式は大域的 Lorentz 変換しか受けない四脚場による変分から得られる．

一般に，曲率も捩率もゼロでない時空を **Riemann-Cartan 時空** U_4 という[14)]．Poincaré ゲージ理論は U_4 上のゲージ理論として定式化されている[15)]．なお，Riemann-Cartan 時空において，捩率をゼロに持っていけば，$U_4 \to R_4$，さらに曲率をゼロに持っていけば，$R_4 \to M_4$，最初に曲率をゼロに持っていけば，$U_4 \to A_4$，次に捩率をゼロにすれば，$A_4 \to M_4$ のように通る道は異なるが，いずれも特殊相対論の Minkowski 時空に移行する．

四脚場および Lorentz ゲージ場は一般に独立な力学的自由度を持つので，変分原理によって，全ラグランジアン密度から運動方程式を導き，物質場の振る舞いと矛盾なくそれを決定する必要がある．その際，時空の捩率は，もし存在すれば，物質場のスピン角運動量に起源を持つことがわかる．ただ，これらを一般論

として説明することは，この本の目的を逸脱しており，その物理的内容に深入りすることは専門家でない著者の能力を遙かに超えている．その代わり，6.4 節で，超重力の理論を例にとり，そのモデルにおける物質と時空構造の関係を調べる．次節はその準備に当てる．

6.3　超対称 Wess-Zumino 模型の四元数記述

対称性の原理の歴史で概念的に斬新なアイデアは**超対称性**であろう．これは，ボソンとフェルミオンを混ぜる変換のもとで，理論が不変になることを要請するものである．超対称変換のもとで閉じた多重項は，**超多重項**と呼ばれ，それはスピンが 1/2 だけ違うボソンとフェルミオンから構成される．しかも，超多重項をなすボソンとフェルミオンの自由度はいつも一致する．線形な超対称変換はこの他に補助場の存在を要求する．変換のパラメーターはフェルミオン的，詳しく言えば，Grassmann 変数の Majorana スピノルで，変換の閉じた代数は次数付きになる．

自然界では，縮退したボソンとフェルミオンの系は見つかっていないので，もし，超対称性が存在するとしても，それは何らかの形で破れていなくてはならない．超対称性が自発的に破れた現実的なモデルも提案されており，その痕跡を求める実験家の努力も長年にわたり続いている．その努力が近い将来実を結ぶかも知れないという期待がいまますます高まっている．仮に如何なる痕跡も発見できなくとも，超対称性の数学は本質的に新しい概念をもたらしたというだけで，場の量子論の奥深さを教えてくれる．そこで，この節では，超対称性を満たす場の理論の模型として，最初に提案された Wess-Zumino 模型 (を突破口に場の量子論の新しい分野が建設された[16]) の四元数による取り扱いを行い，(複素化された）四元数 Dirac 理論の適用範囲がこの場合にも及ぶことを示したい．

Wess-Zumino 模型は複素スカラー場 A と Majorana スピノル場 ψ が超対称性を満足するように自明でない形で相互作用している系を記述する．この模型は，(ボソン・フェルミオン間の超対称性のない) 通常の場の量子論に比べ，系のエネルギー・スペクトルにおける重要な変更はもちろん，高エネルギーにおける Feynman 振幅の振る舞いが劇的に改善される点が注目される所以であるが，ここでは初歩的代数計算に限る．系のラグランジアンは複素スカラーな補助場

F を用いて四元数形式では

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g \tag{6.63a}$$

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{Re}\,[(\partial A)(\bar{\partial} A^*) + \frac{1}{2}(\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi) + (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\psi) + FF^*] \tag{6.63b}$$

$$\mathcal{L}_m = m\mathrm{Re}\,[-\frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi + \psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger)b_3 + AF + A^*F^*] \tag{6.63c}$$

$$\mathcal{L}_g = g\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}\psi b_3 A + \psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger b_3 A^* - A^2F - (A^*)^2F^*] \tag{6.63d}$$

とかける[17)]．ここで，ψ は Majorana スピノルで，Majorana 条件 $\psi\bar{b}_1 = \psi$ を満たす．Majorana スピノル ψ に対する四元数カイラル分解 (4.66) は Weyl スピノル $\psi^\alpha \equiv \xi^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ のみを用いた

$$\psi = \psi^\alpha V_\alpha, \quad V_1 = v_1 + v^2, \quad V_2 = v_2 - v^1, \quad V_\alpha\bar{b}_1 = V_\alpha \tag{6.64}$$

になることに注意する．ここで，v_α, v^α は (4.65) で定義されている．微分記号 ∂ は (6.15) で定義され，$\bar{\partial}$ はその四元数共役である．運動方程式は

$$L[A] \equiv \Box A + mF^* + g\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger b_3 - 2A^*F^*] = 0 \tag{6.65a}$$

$$L[\psi] \equiv i\bar{\partial}\psi - m\bar{\psi}^\dagger b_3 + 2g\bar{\psi}^\dagger b_3 A^* = 0 \tag{6.65b}$$

$$L[F] \equiv F + mA^* - g(A^*)^2 = 0 \tag{6.65c}$$

で与えられ，補助場は (6.65c) およびその複素共役を使って消去できるので，この系はスピン 0 のボソン 2 つと，スピン 1/2 のフェルミオン (Majorana 粒子) の自由度 2 が等しい (質量殻外でも自由度の数は一致する．実数で数えて，Majorana フェルミオン場の自由度 4 と，ボソン場の A, F の自由度 4 は等しい)．このラグランジアンから定義される作用がボソン変数とフェルミオン変数を結ぶ次の超対称変換のもとで不変であることは容易にわかる[18)]．

$$\delta A = \sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}\psi b_3] \tag{6.66a}$$

$$\delta\psi = \sqrt{2}[-i(\partial A)\bar{\varepsilon}^\dagger b_3 + F\varepsilon] \tag{6.66b}$$

$$\delta F = -\sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger i\bar{\partial}\psi] \tag{6.66c}$$

ただし，変換のパラメーター ε は定数の Grassmann 的 $SL(1, \mathbb{H}^c)$ Majorana スピノル ($\varepsilon\bar{b}_1 = \varepsilon$) で，質量次元は $-1/2$ である．実際，ラグランジアン自身は不変でないが，変化するのは全微分項にまとめられる．

$$\delta\mathcal{L} = \partial_i K^i \tag{6.67a}$$

$$K^i = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger(\bar{\partial}A)b^i\bar{\varepsilon}^\dagger b_3] - \frac{i}{\sqrt{2}}(F + 2mA^* - 2gA^{*\,2})\mathrm{Re}\,[\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0 + \mathrm{h.c.} \tag{6.67b}$$

なおこの際，$\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}\psi b_3](\delta A) = 0$ を証明する必要があるが，(6.66a) を使って，$\psi\bar{\psi} = (\psi\bar{b}_1)\overline{\psi\bar{b}_1} = -\psi\bar{\psi} = 0, \psi\bar{\varepsilon} = (\psi\bar{b}_1)\overline{\varepsilon\bar{b}_1} = -\psi\bar{\varepsilon} = 0$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}\psi b_3](\delta A) &= \sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}\psi b_3]\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}\psi b_3] = \frac{\sqrt{2}}{4}(\bar{\psi}\psi b_3 + b_3\bar{\psi}\psi)(\bar{\varepsilon}\psi b_3 + b_3\bar{\psi}\varepsilon)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\bar{\psi}\psi b_3\bar{\varepsilon}\psi b_3 + b_3\bar{\psi}\psi b_3\bar{\psi}\varepsilon) = 0\end{aligned}$$

を得る[19)]．最後の等式は，Majorana スピノルに対する表示 (6.64) で ψ^α が Grassmann 的であることによる (上式各項は $\psi^\alpha\psi^\beta\psi^\gamma$ に比例するが，α, β, γ は 1, 2 の値しか取らないので，これらは変数の Grassmann 性から必ずゼロになる)．

(6.67) の証明

Wess-Zumino のラグランジアン (6.63) は 3 つの項が各々超対称変換 (6.66) のもとで (発散を除いて) 不変である．その証明の際，ψ と $\psi^\dagger$ が独立に変分できることに注意されたい．まず，$\delta\mathcal{L}_0 = \partial_i k_0^i + \delta_0$ とかける．簡単のため，$\mathrm{Re}\,[q] \equiv [q]_0$ と略記して，

$$\begin{aligned}k_0^i &= -\delta A\partial^i A^* - \partial^i A\delta A^* - \frac{i}{2}[\psi^\dagger\bar{b}^i\delta\psi - \delta\psi^\dagger\bar{b}^i\psi]_0\\ \delta_0 &= \delta A(\Box A^*) + (\Box A)\delta A^* + [\delta\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi) + (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\delta\psi]_0 + \delta FF^* + F\delta F^*\end{aligned}$$

を得る．この δ_0 に (6.66) を代入する．$\delta\psi$ にある F の項は $F\delta F^*$ と相殺する．

$$[(i\bar{\partial}\psi)^\dagger(\sqrt{2}F\varepsilon)]_0 - F\sqrt{2}[(i\bar{\partial}\psi)^\dagger\varepsilon]_0 = 0$$

同様に，$\delta\psi^\dagger$ にある F^* の項は δFF^* と相殺する．従って，δ_0 は

$$\delta_0 = \delta A(\Box A^*) + (\Box A)\delta A^* + [\delta'\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi) + (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\delta'\psi]_0$$

となった．ただし，$\delta'\psi = \delta\psi|_{F=0}$．ところが，

$$\begin{aligned}(\Box A)\delta A^* + [(i\bar{\partial}\psi)^\dagger\delta'\psi]_0 &= (\Box A)\sqrt{2}[\psi^\dagger\bar{\varepsilon}^\dagger b_3]_0 + \Big[(i\bar{\partial}\psi)^\dagger[-\sqrt{2}i(\partial A)\bar{\varepsilon}^\dagger b_3\Big]_0\\ &= \sqrt{2}\partial_i[\psi^\dagger\bar{b}^i(\partial A)\bar{\varepsilon}^\dagger b_3]_0\end{aligned}$$

で，δ_0 の残りの項はこのエルミート共役で与えられる．すなわち

$$\delta_0 = \partial_i k_1^i, \quad k_1^i = \sqrt{2}[\psi^\dagger\bar{b}^i(\partial A)\bar{\varepsilon}^\dagger b_3]_0 + \mathrm{h.c.}$$

になる．最後に k_0^i に (6.66) を代入して整理すれば

$$\delta\mathcal{L}_0 = \partial_i K_0^i, \quad K_0^i = k_0^i + k_1^i = -\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi^\dagger(\bar{\partial}A)b^i\bar{\varepsilon}^\dagger b_3]_0 - \frac{i}{\sqrt{2}}F[\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0 + \text{h.c.}$$

となるが，これは (6.67b) で $m = g = 0$ とおいたものに他ならない (まだ F は残っている).

次に，

$$\delta\mathcal{L}_m = m[-(\bar{\psi}\delta\psi + \delta\psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger)b_3 + \delta AF + A\delta F + \delta A^* F^* + A^*\delta F^*]_0$$

の中で，

$$[-\delta\psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger b_3]_0 = -\sqrt{2}[(b_3\bar{\varepsilon}(i\partial A^*) + F^*\varepsilon^\dagger)\bar{\psi}^\dagger b_3]_0$$

の 第 2 項は $\delta A^* F^* = \sqrt{2}[\psi^\dagger\bar{\varepsilon}^\dagger b_3]_0 F^* = \sqrt{2}[\varepsilon^\dagger\bar{\psi}^\dagger b_3]_0 F^*$ と 相 殺し，第 1 項は $-\sqrt{2}[b_3\bar{\varepsilon}(i\partial A^*)\bar{\psi}^\dagger b_3]_0$
$= -\sqrt{2}[i(\partial_i A^*)\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0$ とかき換えると，

$$A^*\delta F^* = -\sqrt{2}A^*[(i\bar{\partial}\psi)^\dagger\varepsilon]_0 = -\sqrt{2}\partial_i[iA^*\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0 + \sqrt{2}[i(\partial_i A^*)\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0$$

の第 2 項と相殺することがわかる．結局

$$\delta\mathcal{L}_m = \partial_i K_m^i, \quad K_m^i = -m\sqrt{2}[iA^*\psi^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]_0 + \text{h.c.}$$

が成り立ち，これが (6.67b) の m に比例する項を与える．

最後に (6.67b) 下の注意によって，

$$\delta\mathcal{L}_g = g[2\bar{\psi}\delta\psi b_3 A - 2A\delta AF - A^2\delta F + \text{h.c.}]_0$$

を得る．ここで，$\delta\psi$ の F を含む項は $-2A\delta AF$ と相殺するので，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_g &= g[2\bar{\psi}\delta'\psi b_3 A - A^2\delta F + \text{h.c.}]_0 \\ &= \sqrt{2}g[2\bar{\psi}\{(-i\partial A)\bar{\varepsilon}^\dagger b_3\}b_3 A + A^2[\varepsilon^\dagger i\bar{\partial}\psi]_0]_0 + \text{h.c.} \\ &= g\sqrt{2}i\partial_i[\bar{\psi}b^i\bar{\varepsilon}^\dagger A^2] + \sqrt{2}i[-(\partial_i\bar{\psi})b^i\bar{\varepsilon}^\dagger A^2 + A^2[-\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\partial_i\psi]_0]_0\end{aligned}$$

この第 2 項は $[-\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\partial_i\psi]_0 = [(\partial_i\bar{\psi})b^i\bar{\varepsilon}^\dagger]_0$ とかき換えることによりゼロになることがわかる．従って

$$\delta\mathcal{L}_g = \partial_i K_g^i, \quad K_g^i = gA^2\sqrt{2}i\partial_i[\bar{\psi}b^i\bar{\varepsilon}^\dagger]_0 + \text{h.c.}$$

を得る．(6.67) の $K^i = K_0^i + K_m^i + K_g^i$ である．□

また，質量殻上で保存する Noether 流は (変換のパラメーター ε を含めて)

$$J^i = -\sqrt{2}\text{Re}\,[\bar{\varepsilon}(\partial A^*)\bar{b}^i\psi b_3] + \sqrt{2}iF^*\text{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi] + \text{h.c.} \tag{6.68}$$

で与えられることも注意しておく (補助場 F は運動方程式 $L[F] = 0$ を使って消去できる)．これを $J^i = \text{Re}\,[\bar{\varepsilon}j^i + \text{h.c.}]$ の形にかいて変換のパラメーター ε

を除いた Noether 流 j^i も定義できる[20].

(6.68) の証明

任意の無限小変分に対するラグランジアン (6.63) の変化は，(6.65) の記号を使って，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_i k_0^i + \delta_0 + \delta\mathcal{L}_m + \delta\mathcal{L}_g = \partial_i k_0^i + (\delta\psi^\dagger L[\psi] + L[A]\delta A^* + L[F]\delta F^* + \mathrm{h.c.})$$

となるので，運動方程式 (6.65) が成り立つ質量殻上では $\delta\mathcal{L}|_{\text{質量殻上}} = \partial_i k_0^i$ に等しい．定義により，Noether 流は

$$\begin{aligned} J^i &= k_0^i - K^i = -(k_1^i + K_m^i + K_g^i) \\ &= -\sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}(\partial A^*)\bar{b}^i\psi b_3] - \sqrt{2}i(mA - gA^2)\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi] + \mathrm{h.c.} \\ &= -\sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}(\partial A^*)\bar{b}^i\psi b_3] + \sqrt{2}iF^*\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi] + \mathrm{h.c.} \end{aligned}$$

で与えられる．最後の式に移るとき，再び運動方程式 (6.65c) を用いた．□

次に超対称変換を 2 度繰り返すと，場 A, ψ, F に対して，

$$[\delta_1, \delta_2]\varphi = \xi^i\partial_i\varphi, \quad \varphi = A, \psi, F \tag{6.69a}$$

$$\xi^i \equiv -2i\mathrm{Re}\,[\varepsilon_1^\dagger\bar{b}^i\varepsilon_2 - \varepsilon_2^\dagger\bar{b}^i\varepsilon_1] \tag{6.69b}$$

が成り立つ[21]．(6.69a) のうち，$\varphi = A, F$ については簡単に示せるが，スピノル場に対する証明は次のようにする．

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\psi &= \sqrt{2}(-i(\partial\delta_1 A)\bar{\varepsilon}_2^\dagger b_3 + \delta_1 F\varepsilon_2) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= 2i\{b^i\bar{\varepsilon}_2^\dagger b_3\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}_1\partial_i\psi b_3] + \varepsilon_2\mathrm{Re}\,[\varepsilon_1^\dagger\bar{b}^i\partial_i\psi]\} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= i\{\varepsilon_2(\varepsilon_1^\dagger\bar{b}^i\partial_i\psi - \partial_i\bar{\psi}b^i\bar{\varepsilon}_1^\dagger) + b^i\bar{\varepsilon}_2^\dagger b_3(b_3\bar{\varepsilon}_1\partial_i\psi + \partial_i\bar{\psi}\varepsilon_1 b_3)\} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \xi^i\partial_i\psi \end{aligned}$$

この証明で必要なのは，Majorana 条件からくる恒等式 $\varepsilon_2\partial_i\bar{\psi} = (\varepsilon_2\bar{b}_1)\partial_i(\overline{\psi\bar{b}_1}) = -\varepsilon_2\partial_i\bar{\psi} = 0, \bar{\varepsilon}_2^\dagger b_3\partial_i\bar{\psi} = \overline{(\varepsilon_2\bar{b}_1)}^\dagger b_3\partial_i(\overline{\psi\bar{b}_1}) = -\bar{\varepsilon}_2^\dagger b_3\partial_i\bar{\psi} = 0$ と残りの $\partial_i\psi$ の左に来る係数が実になるという事実だけである．

もし変換のパラメーター ε が定数ではなく局所的 $\varepsilon = \varepsilon(x)$ だと仮定したらどうなるだろうか．つまり超対称性のゲージ化を行うのである．もとの模型の不変性は明らかに壊れる．いま簡単のため，$m = g = 0$ とおき，補助場は運動方程式を使って消去する．それ故，局所化されたパラメーター $\varepsilon(x)$ を持つ (6.66a,b) のもとでの次のラグランジアンの変換性を考えることになる ($\psi\bar{b}_1 = \psi$).

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{Re}\,[(\partial A)(\bar{\partial} A^*) + \frac{1}{2}(\psi^\dagger(i\bar{\partial}\psi) + (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\psi)] \tag{6.70a}$$

(6.66a,b) の ε を定数でなくすると，このラグランジアンの変分は

$$\delta\mathcal{L}_0 = \partial_i K_0^i - 2\mathrm{Re}\,[(\partial_i\bar{\varepsilon})X^i + \mathrm{h.c.}], \quad X^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial A^*)\bar{b}^i\psi b_3 \tag{6.70b}$$

のように，作用の不変性を破る余分の項が加わる．ただし，K_0^i は (6.67b) で第 2 項を落としたもので与えられる．また，$-2\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}X^i + \mathrm{h.c.}]$ は (6.68) の Noether 流 (いま $F = 0$ とおいている) に一致する．そこで不変性を回復するため次のラグランジアンを付け加える．

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{k}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_i X^i + \mathrm{h.c.}] + \mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)} \tag{6.71}$$

ここで，新しく導入された局所超対称変換に対するゲージ場 ψ_i は，ベクトルの添字をもったスピノルで，その量子は**重力微子**と呼ばれる．その質量次元は 3/2 であるから，X^i が質量次元 7/2 を持つことを考えると，係数 k は質量次元 +1 を持たねばならない．そして ψ_i がゲージ変換

$$\delta\psi_i = 2k\partial_i\varepsilon, \tag{6.72}$$

を受ければ，(6.70b) の余分の項は消える．ラグランジアン $\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)}$ は ψ_i に対するよく知られた零質量の Rarita-Schwinger 場に対するラグランジアンで，ゲージ変換 (6.72) のもとで (発散 $\partial_i k^i$ を除いて) 不変である．

$$\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\mathrm{Re}\,[(\psi_i\partial_j\psi_k^\dagger)\bar{b}_l + \mathrm{h.c.}], \quad \psi_i\bar{b}_1 = \psi_i \tag{6.73}$$

それ故，今度は

$$\delta(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) = \partial_i K'^i_0 + \frac{1}{k}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_i\delta X^i + \mathrm{h.c.}], \quad K'^i_0 = K_0^i + k^i \tag{6.74}$$

となるが，この第 2 項を消すために再び新しいラグランジアンを付け加えることを考える．その形は，δX^i の中に複素場 A のエネルギー・運動量テンソル

$$T_j{}^i(A) = \partial^i A^*\partial_j A + \partial_j A^*\partial^i A - \eta_j{}^i\partial_k A^*\partial^k A \tag{6.75}$$

に比例する項が生まれることから推測できる．則ち，

$$\delta(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) = \partial_i K'^i_0 - \frac{i}{k}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_i b^j T_j{}^i(A)\varepsilon^\dagger - \mathrm{h.c.}] + \cdots \tag{6.76}$$

の第 2 項を消すのである．理由がない上に，あとで矛盾することがわかるが，この式のラテン添字をギリシャ添字に変えて，新しく付け加えるラグランジアンを

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{6.77}$$

と選ぶ．このとき，

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{i}{k}[\bar{\varepsilon}^\dagger \bar{\psi}_\mu b_\nu - b_\nu \bar{\psi}_\mu^\dagger \bar{\varepsilon} + (\mu \leftrightarrow \nu)] \tag{6.78}$$

を仮定すればよい．(6.28) の定義を用いれば，これは，

$$\delta b_\mu = -\frac{i}{k}[\varepsilon \bar{\psi}_\mu^\dagger - \psi_\mu \varepsilon^\dagger] \tag{6.79}$$

から導ける．(6.78) の変換則から，

$$\delta(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \partial_\mu K'^{\mu}_0 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta T^{\mu\nu} + \cdots \tag{6.80}$$

を得る．この逐次近似は無限に繰り返され終わりのない作業である．その上，不変体積要素に必要な $\sqrt{-g}$ はえられそうにない．実際，(6.77)は正しいラグランジアン密度ではない．正しいラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{-g}(\partial_\mu A \partial_\nu A^* + \partial_\nu A \partial_\mu A^*) g^{\mu\nu}$$

で与えられ，これを $g_{\mu\nu}$ で変分すれば，(6.77)の $g_{\mu\nu}$ を変分したものに等しく，従って，(6.78)が導かれる事には変わりない．それ故，(6.80)は正しい超対称変換則を導くために，便宜上 (6.77)を仮定した上での結論に他ならないことに注意して欲しい．従って，仮にラテン添字をギリシャ添字に変えるという恣意的方便を使っても，この作業を続ける限り矛盾は避けられず，不変性の議論には決定的に欠けることに気づかされる．けれどもこの近似において**重力子**を記述する重力場の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とともに，その変換則 (6.78) に座標ベクトル場 ψ_μ, b_μ が現れた．これは特に，(6.73) の Rarita-Schwinger ラグランジアンを一般相対論的に不変な形に書き換えるべきことを要求し，変分 (6.72) もギリシャ添字に書き換えた上で共変性を満たすように修正する必要がある．(6.72) (の共変化) および (6.79) から導ける (6.78) を見れば，重力子と重力微子は 1 つの超多重項を組むことがわかる (両者の自由度が等しいことはすぐ後で見る)．よく知られているように，この超多重項だけで，局所超対称性を満たす模型 (4 次元単純超重力理

論) が存在することがわかっている．そこで，Wess-Zumino 模型は忘れて次のステップに進むのであるが，その前に重力微子の自由度のことを調べておこう．

一般に質量 m の Majorana Rarita-Schwinger 場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{R\text{-}S} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\mathrm{Re}\left[(\psi_i\partial_j\psi_k^\dagger)\bar{b}_l + \mathrm{h.c.}\right] - \frac{im}{4}\varepsilon^{ijkl}\mathrm{Re}\left[\bar{\psi}_i b_k \bar{b}_l \psi_j b_3 - \mathrm{h.c.}\right] \tag{6.81}$$

(ただし，$\psi_i\bar{b}_1 = \psi_i$) で与えられる[22]から，運動方程式 (Rarita-Schwinger 方程式) は

$$\delta_{\psi_i}\mathcal{L}_{R\text{-}S} = \mathrm{Re}\left[\delta\psi_i R^{i\,\dagger} + \mathrm{h.c.}\right] + (\text{全微分項}) \tag{6.82a}$$

から

$$R^i \equiv -\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_l\partial_j\psi_k - \frac{im}{2}\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_k b_l \bar{\psi}_j^\dagger b_3 = 0 \tag{6.82b}$$

とかける．これから

$$\partial_i R^i = \frac{3}{2}im^2\bar{b}^j\psi_j \tag{6.82c}$$

を得る．$m=0$ のときはこれは自動的にゼロになるが，$m \neq 0$ のときは，条件

$$\bar{b}^j\psi_j = 0 \tag{6.82d}$$

を課さないとゼロにならない．この既約性の条件を課すと，(6.82b) から

$$\bar{b}_i\bar{R}^{i\,\dagger} = -2i(\bar{b}^j b^k + \eta^{jk})\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger + 3m\bar{b}^j\psi_j b_3 = -2i\eta^{jk}\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger = 0 \tag{6.82e}$$

が導ける．その結果，各 ψ_i $(i=0,1,2,3)$ は質量 m の自由な Dirac 方程式

$$i\bar{\partial}\psi_i - m\bar{\psi}_i^\dagger b_3 = 0 \tag{6.83}$$

に従う．ゆえに，第 3 章注 5) で述べたように，各 Majorana 場 ψ_i $(i=0,1,2,3)$ が記述する独立な自由度は合計 $2\times 4 = 8$ に過ぎない．ところが既約性の条件 (6.82d) および条件 (6.82e) のため，独立な自由度はさらに $2\times 2 = 4$ 減る．ゆえに，有質量 Majorana Rarita-Schwinger 場 の記述する独立な (質量殻上の) 物理的自由度は $8-4=4$ になる．

ところが，$m=0$ のときはゲージ変換の自由度がある．その上，この場合も既約性の条件 (6.82d) は仮定する．従って，それから (6.82e) が導かれるのは

$m \neq 0$ のときと同じである．ゲージ変換のパラメーター ε は Majorana スピノルなので，4 つの実数からなるが，(6.82d) から ε は零質量の Majorana 方程式 $i\bar{\partial}\varepsilon = 0$ を満たすので，独立な物理的自由度を 2 つ減らす．ゆえに，零質量 Majorana Rarita-Schwinger 場 の記述する独立な (質量殻上の) 物理的自由度は $4-2=2$ になる．これは零質量の重力子のヘリシティ± 2の自由度と一致する．

ただし，質量殻外での自由度の計算は異なる．ボソン場 b^μ の自由度は全部で 16 あるが，一般座標変換には 4 つの (時空点に依存する) ボソンのパラメーターが含まれ，局所 Lorentz 変換には 6 個の (時空点に依存する) ボソンのパラメーターが含まれるので，独立なボソン場の自由度は $16-4-6=6$ となる．他方，フェルミオン場 ψ_μ の自由度は b^μ と同じく 16 であるが，局所超対称性の自由度 ($\varepsilon(x)$ の成分数) 4 を引いて，独立なフェルミオン場の自由度は $16-4=12$ もある．この違いについては後ほど簡単にコメントする．

(6.82)，(6.83) の導出

次節の準備運動を兼ねて，(6.82) の一連の式を導く標準的な四元数計算を説明する．まず，$\delta_{\psi_i}\mathcal{L}_{R\text{-}S}$ でもって $\delta\psi_i$ と $\delta\psi_i^\dagger$ を独立に変分することを表すとして，$\mathrm{Re}\,[q]=[q]_0$ とかくのであったから，

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_i}\mathcal{L}_{R\text{-}S} &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}[(\delta\psi_i\partial_j\psi_k^\dagger)\bar{b}_l + \partial_j(\delta\psi_k)\psi_i^\dagger\bar{b}^l + \mathrm{h.c.}]_0 \\
&\qquad - \frac{im}{4}\varepsilon^{ijkl}[\delta\bar{\psi}_i b_k\bar{b}_l\psi_j b_3 + \bar{\psi}_i b_k\bar{b}_l(\delta\psi_j)b_3 - \mathrm{h.c.}]_0 \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}[\delta\psi_i(\partial_j\psi_k^\dagger)\bar{b}_l - \delta\psi_k(\partial_j\psi_i^\dagger)\bar{b}^l + \mathrm{h.c.}]_0 \\
&\qquad - \frac{im}{4}\varepsilon^{ijkl}[b_3\bar{\psi}_j b_l\bar{b}_k\delta\psi_i + b_3\bar{\psi}_i b_k\bar{b}_l\delta\psi_j - \mathrm{h.c.}]_0 + (\text{全微分項}) \\
&= \mathrm{Re}\,[\delta\psi_i R^{i\,\dagger} + \mathrm{h.c.}] + (\text{全微分項}) \\
R^{i\,\dagger} &= -\varepsilon^{ijkl}(\partial_j\psi_k^\dagger)\bar{b}_l + \frac{im}{2}\varepsilon^{ijkl}b_3\bar{\psi}_j b_l\bar{b}_k
\end{aligned}$$

このエルミート共役が (6.82b)．R^i の発散は質量項のみが生き残るが，新しく $\partial_i\bar{\psi}_j^\dagger$ が生じる．この項を $\bar{R}^{i\,\dagger}=0$ から消去すると，添字をシャッフルして，

$$\begin{aligned}
\partial_i R^i &= -\frac{im}{2}\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_k b_l(\partial_i\bar{\psi}_j^\dagger)b_3 = -\frac{im}{2}\varepsilon^{jkil}\bar{b}_i b_l(\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger)b_3 \\
&= \Big(-\frac{im}{2}\Big)^2\bar{b}_i\Big[\varepsilon^{ijkl}b_k\bar{b}_l\psi_j b_3\Big]b_3 = -\frac{m^2}{4}\varepsilon^{ijkl}(\bar{b}_i b_k\bar{b}_l)\psi_j \\
&= -\frac{m^2}{8}\varepsilon^{iklj}(\bar{b}_i b_k\bar{b}_l - \bar{b}_l b_k\bar{b}_i)\psi_j = -\frac{m^2}{8}\varepsilon^{iklj}(2i\varepsilon_{iklm}\bar{b}^m)\psi_j
\end{aligned}$$

$$= +\frac{3im^2}{2}\bar{b}^j\psi_j$$

ここで，(6.5b) および $\varepsilon^{iklj}\varepsilon_{iklm} = -3!\eta^j{}_m$ を用いた．従って，$\varepsilon^{iklj}\bar{b}_i b_k \bar{b}_l = -3!i\bar{b}^j$ となる．これが (6.82c)．次に

$$\begin{aligned}
\bar{b}_i \bar{R}^{i\,\dagger} &= -\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_i b_l(\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger) - \frac{im}{2}(\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_i b_k \bar{b}_l)\psi_j b_3 \\
&= -i(\bar{b}^j b^k - \bar{b}^k b^j)(\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger) - 3m\bar{b}^j\psi_j b_3 \\
&= i(-2\eta^{kj} - 2\bar{b}^j b^k)(\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger) - 3m\bar{b}^j\psi_j b_3 = -2i\eta^{jk}\partial_j\bar{\psi}_k^\dagger
\end{aligned}$$

ここで， (6.5d) および既約性の条件 $\bar{b}^j\psi_j = 0 = \overline{\bar{b}^j\psi_j}^\dagger$ を用いた．これが (6.82e)．

さて，(6.82d)，(6.82e) を使って $R^i = 0$ を次のように変形する．その際，(6.5b) の四元数共役，(6.5d) および既約性の条件を利用する．

$$\begin{aligned}
R^i &= -\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_l\partial_j\psi_k - \frac{im}{2}\varepsilon^{ijkl}\bar{b}_k b_l\bar{\psi}_j^\dagger b_3 \\
&= -\frac{1}{2i}(\bar{b}^k b^j \bar{b}^i - \bar{b}^i b^j \bar{b}^k)\partial_j\psi_k + \frac{m}{2}(\bar{b}^i b^j - \bar{b}^j b^i)\bar{\psi}_j^\dagger b_3 \\
&= -\frac{1}{2i}\bar{b}^k b^j \bar{b}^i\partial_j\psi_k - \frac{m}{2}\bar{b}^j b^i\bar{\psi}_j^\dagger b_3 = -\frac{i}{2}\bar{b}^j b^k \bar{b}^i\partial_j\psi_k + m\eta^{ij}\bar{\psi}_j^\dagger b_3 \\
&= i\bar{b}^j\eta^{ki}\partial_j\psi_k + m\eta^{ij}\bar{\psi}_j^\dagger b_3 = 0
\end{aligned}$$

これが (6.83)．□

6.4　4 次元単純超重力理論と四元数変分原理

前節で見たように局所化された超対称性の理論は，必然的に重力の理論となり，それ故，**超重力理論**と呼ぶのであるが，その最も簡単なモデルは，質量ゼロの重力子と重力微子を超多重項として持つ理論である．四元数による以下の計算は，記号になれないと複雑に見えるが，行列を使わない代数計算の流れをできるだけ見透しよくするよう配慮した．なお，前節ではよく知られた 4 成分表示への移行を参考のため注で述べておいたが，この節と次節ではそのような変形の結果はすべて省略する．また，局所超対称性の自発的破れの問題も議論しない．

考えるモデルは次のようなラグランジアン密度を持つ．

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_G^{(0)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S}^{(0)} \tag{6.84a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_G^{(0)} = \frac{b}{2\kappa}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}b^\mu\bar{b}^\nu + \mathrm{h.c.}] = \frac{i}{4\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}b_\rho\bar{b}_\sigma - \mathrm{h.c.}] \tag{6.84b}$$

$$\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\psi_\mu(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma + \mathrm{h.c.}], \quad \psi_\mu\bar{b}_1 = \psi_\mu \tag{6.84c}$$

ここで，$b^{-1}\mathcal{L}_G^{(0)}$ は (6.53) で与えられた重力場のラグランジアン $(a = (2\kappa)^{-1})$ である．$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = b\varepsilon^{ijkl}b_i{}^\mu b_j{}^\nu b_k{}^\rho b_l{}^\sigma$ は Levi-Civita テンソル密度でどの座標系でも同じ値を持つ ($\boldsymbol{E}^{0123} = 1$)．(6.84b) の 2 番目の等号は，公式 (6.5d,e) を用いて確かめられる．(6.84c) の $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ は (6.20a) で与えられるスピノル場に対する Lorentz 共変微分である．また条件 $\psi_\mu\bar{b}_1 = \psi_\mu$ は Majorana 条件 (5.40c) を Rarita-Schwinger 場に対して要請するものである．(6.84c) は零質量 Rarita-Schwinger 場に対する Lorentz 不変なラグランジアン (6.73) を一般座標変換および局所 Lorentz 変換のもとで不変にしたものである．ただし極小相互作用を仮定して，捩率の項は落とした (不変性には影響しない)．その構成からして，作用 $\boldsymbol{S} = \int d^4x\mathcal{L}$ は座標スカラー， Lorentz スカラーである．

さて，任意の変分 $\delta\phi^\mu, \phi^\mu = b^\mu, A^\mu, \psi^\mu$ を考える．すべて独立に変分する．6.2 節で述べたように，1 階方式を採用する理由は，便宜のためではなく，四元数変分原理を適用する場合は，変分すべき場が浮いたラテン添字を持たない四元数場であるべしという理論的要請からである．実際，上のラグランジアン密度はすべて四元数場だけでかけている．対応するラグランジアン密度の変分を $\delta_{\phi^\mu}\mathcal{L}$ とかく．まず b^μ に関する変分に対しては，

$$\delta_{b^\mu}\mathcal{L}_G^{(0)} = -\frac{1}{\kappa}\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{G}^\mu\delta\bar{b}_\mu] \tag{6.85a}$$

$$\boldsymbol{G}^\mu \equiv \frac{b}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\rho\sigma}b^\rho\bar{b}^\sigma + \mathrm{h.c.}]b^\mu - \frac{b}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\rho\sigma}(b^\mu\bar{b}^\sigma - b^\sigma\bar{b}^\mu) + \mathrm{h.c.}]b^\rho \tag{6.85b}$$

$$\delta_{b^\mu}\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)} = \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{T}^\mu\delta\bar{b}_\mu] \tag{6.85c}$$

$$\boldsymbol{T}^\mu \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\{\psi_\nu(\mathcal{D}_\rho\psi_\sigma)^\dagger + (\mathcal{D}_\rho\psi_\sigma)\psi_\nu^\dagger\} \tag{6.85d}$$

という結果を得る．

(6.85) の証明

(6.85c,d) は簡単だから，(6.85a,b) を証明する．

$$F = -\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu} b^\mu \bar{b}^\nu + \text{h.c.}] \tag{6.86a}$$

とおいて，

$$\delta_{b^\mu}(2\kappa \boldsymbol{\mathcal{L}}_G^{(0)}) = -F\delta b + b\,\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}\delta(b^\mu \bar{b}^\nu) + \text{h.c.}] \tag{6.86b}$$

を計算すればよい．第 1 項には $\delta b = bb_i{}^\mu \delta b^i{}_\mu = -b\,\mathrm{Re}\,[b^\mu \delta \bar{b}_\mu]$ を使う．第 2 項は次のように計算する．因子 b を除いて，$F_{\mu\nu}$ の反対称性と (6.51) の成分場表示を利用すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}\delta(b^\mu \bar{b}^\nu) + \text{h.c.}] &= \mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}(b^k \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^k) + \text{h.c.}]\delta b_k{}^\mu \\ &= -\mathrm{Re}\,[F_{\rho\nu}(b^\mu \bar{b}^\nu - b^\nu \bar{b}^\mu) + \text{h.c.}](b_k{}^\rho \delta b^k{}_\mu)\end{aligned} \tag{6.86c}$$

ここで，$b_k{}^\rho \delta b^k{}_\mu = -\mathrm{Re}\,[b^\rho \delta \bar{b}_\mu]$ を使えば，(6.86b) は (6.85a,b) を与える．なお，(6.51a) で定義された場の強さの成分場から，(6.86a) の F は

$$F_{ijkl} = b_k{}^\mu b_l{}^\nu F_{\mu\nu ij} \tag{6.86d}$$

$$F_{ij} = \eta^{kl} F_{ikjl} \tag{6.86e}$$

$$F = \eta^{ij} F_{ij} \tag{6.86f}$$

で定義されていることが分かる．また，

$$F_i{}^\mu = g^{\mu\nu} F_{ji} b^j{}_\nu \tag{6.86g}$$

と定義すれば，

$$(6.86\text{c}) = 2F_i{}^\mu \delta b^i{}_\mu \tag{6.86h}$$

となる．ゆえに

$$\boldsymbol{G}^\mu = bG^\mu, \quad G^\mu = b^i G_i{}^\mu, \quad G_i{}^\mu = F_i{}^\mu - \frac{1}{2} F b_i{}^\mu \tag{6.86i}$$

のように与えられることが分かる．□

次に A_μ に関する変分は次のように与えられる．

$$\delta_{A_\mu} \boldsymbol{\mathcal{L}}_G^{(0)} = \frac{1}{\kappa} \mathrm{Re}\,[\delta A_\mu \boldsymbol{H}^\mu + \text{h.c.}] + \partial_\mu \boldsymbol{a}^\mu \tag{6.87a}$$

$$\boldsymbol{H}^\mu \equiv \frac{i}{2} \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} S_{\rho\nu} \bar{b}_\sigma, \quad S_{\rho\nu} \equiv b_{\rho||\nu} - b_{\nu||\rho} \tag{6.87b}$$

$$\boldsymbol{a}^\mu \equiv \frac{i}{2\kappa} \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Re}\,[\delta A_\nu b_\rho \bar{b}_\sigma] \tag{6.87c}$$

$$\delta_{A_\mu} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S}^{(0)} = -\mathrm{Re}\,[\delta A_\mu \boldsymbol{S}^\mu + \text{h.c.}] \tag{6.87d}$$

$$\boldsymbol{S}^\mu \equiv -\frac{1}{4} \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} (\psi_\rho \psi_\nu^\dagger - \psi_\nu \psi_\rho^\dagger) \bar{b}_\sigma \tag{6.87e}$$

(6.87b) に現れる $b_{\rho||\nu}$ は (6.37) で定義された Lorentz 共変微分である．

(6.87) の証明

(6.87d,e) は容易だから，(6.87a,b,c) を導く．その際，重力場のラグランジアン密度に対する (6.84b) の 2 番目の表式を用いる．

$$\delta_{A_\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_G^{(0)} \tag{6.88a}$$
$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{4\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta F_{\mu\nu})b_\rho\bar{b}_\sigma - \mathrm{h.c.}] \\
&= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\partial_\mu\delta A_\nu + \delta A_\mu A_\nu + A_\mu\delta A_\nu)b_\rho\bar{b}_\sigma - \mathrm{h.c.}] \\
&= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\partial_\mu(\delta A_\nu b_\rho\bar{b}_\sigma) - \delta A_\nu\partial_\mu(b_\rho\bar{b}_\sigma) + \delta A_\mu A_\nu b_\rho\bar{b}_\sigma + \delta A_\nu b_\rho\bar{b}_\sigma A_\mu - \mathrm{h.c.}] \\
&= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\delta A_\mu\{\partial_\nu(b_\rho\bar{b}_\sigma) + A_\nu b_\rho\bar{b}_\sigma - b_\rho\bar{b}_\sigma A_\nu\} - \mathrm{h.c.}] + \partial_\mu\boldsymbol{a}^\mu
\end{aligned} \tag{6.88b}$$

で与えられる．ただし，$\boldsymbol{a}^\mu$ の定義 (6.87c) を用いた．ところが上式の $\{\ \}$ 内は (6.37) の定義を用いると，容易に $b_{\rho||\nu}\bar{b}_\sigma + b_\rho\bar{b}_{\sigma||\nu}$ に等しくなることが示せる．それ故，

$$\begin{aligned}
\text{全微分項を除いた (6.88b)} &= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\delta A_\mu\{b_{\rho||\nu}\bar{b}_\sigma + b_\rho\bar{b}_{\sigma||\nu}\} - \mathrm{h.c.}] \\
&= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\delta A_\mu(b_{\rho||\nu} - b_{\nu||\rho})\bar{b}_\sigma - \mathrm{h.c.}] \\
&= \frac{i}{2\kappa}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\delta A_\mu S_{\rho\nu}\bar{b}_\sigma - \mathrm{h.c.}] = \frac{1}{\kappa}[\delta A_\mu\boldsymbol{H}^\mu + \mathrm{h.c.}]
\end{aligned} \tag{6.88c}$$

となる．ここで，$S_{\rho\nu}, \boldsymbol{H}^\mu$ の定義を用いた．□

最後に，ψ_μ に関するものは，$\delta_{\psi_\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_G = 0$ 以外は次の変分のみである．

$$\delta_{\psi_\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S}^{(0)} = \mathrm{Re}\,[\delta\psi_\mu\boldsymbol{R}^{\mu\,\dagger} + \mathrm{h.c.}] + \partial_\mu\boldsymbol{t}^\mu \tag{6.89a}$$

$$\boldsymbol{R}^\mu \equiv -\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\{\bar{b}_\sigma(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \frac{1}{4}\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\} \tag{6.89b}$$

$$\boldsymbol{t}^\mu \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\rho)\psi_\nu^\dagger\bar{b}_\sigma + \mathrm{h.c.}] \tag{6.89c}$$

ただし，$S_{\lambda\rho}$ は (6.87b) で定義されている．

(6.89) の証明

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi_\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S}^{(0)} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma + \bar{b}_\sigma(\mathcal{D}_\nu\delta\psi_\rho)\psi_\mu^\dagger] \\
&= -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma - \delta\psi_\rho\partial_\nu(\psi_\mu^\dagger\bar{b}_\sigma) + \delta\psi_\rho\psi_\mu^\dagger\bar{b}_\sigma A_\nu] + \partial_\mu\boldsymbol{t}^\mu
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{t}^\mu$ の定義 (6.89c) を用いた．$b_{\mu||\nu}$ に対する定義 (6.37) を用いると，

$$\begin{aligned}\delta_{\psi^\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0)}_{R\text{-}S} - \partial_\mu \boldsymbol{t}^\mu &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma - \delta\psi_\rho(\mathcal{D}_\nu\psi_\mu)^\dagger\bar{b}_\sigma \\ &\quad + \delta\psi_\rho\psi^\dagger_\mu A^\dagger_\nu\bar{b}_\sigma - (\delta\psi_\rho)\psi^\dagger_\mu\partial_\nu\bar{b}_\sigma + \delta\psi_\rho\psi^\dagger_\mu\bar{b}_\sigma A_\nu] \\ &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma - \delta\psi_\rho(\mathcal{D}_\nu\psi_\mu)^\dagger\bar{b}_\sigma - (\delta\psi_\rho)\psi^\dagger_\mu\bar{b}_{\sigma||\nu}] \\ &= -\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[(\delta\psi_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho)^\dagger\bar{b}_\sigma - \frac{1}{4}(\delta\psi_\rho)\psi^\dagger_\mu(\bar{b}_{\sigma||\nu} - \bar{b}_{\nu||\sigma})]\end{aligned}$$

となるが，(6.87b) の定義により，最後の ( ) 内は $\bar{S}_{\sigma\nu}$ に等しいので，添字を変えて (6.89) を得る．□

上で与えた変分の式 (6.85)，(6.87)，(6.89) において，変分として，一般座標変換および局所 Lorentz 変換に対する無限小変換則を代入すれば，Noether の定理により保存則が得られる[23]．また，任意の変分に対する最小作用の原理を使うと，(6.85a,c)，(6.87a,d) から Einstein 方程式[24]

$$\boldsymbol{G}^\mu = \kappa\boldsymbol{T}^\mu \tag{6.91a}$$

$$\boldsymbol{H}^\mu = \kappa\boldsymbol{S}^\mu \tag{6.91b}$$

(6.89) から一般相対論的 Rarita-Schwinger 方程式

$$\boldsymbol{R}^\mu = 0 \tag{6.92a}$$

が導ける．この Lorentz 共変発散は，$\boldsymbol{R}^\mu$ が局所 Lorentz 変換のもとで，

$$\boldsymbol{R}^\mu \to \bar{U}^\dagger\boldsymbol{R}^\mu \tag{6.92b}$$

と変換することから $\overline{\mathcal{D}}^\dagger_\mu\boldsymbol{R}^\mu = (\partial_\mu + \bar{A}^\dagger_\mu)\boldsymbol{R}^\mu = (\partial_\mu - A^\dagger_\mu)\boldsymbol{R}^\mu$ で与えられる．これを計算すれば，

$$\overline{\mathcal{D}}^\dagger_\mu\boldsymbol{R}^\mu = -\frac{i}{2}\bar{\boldsymbol{G}}^\mu\psi_\mu - \frac{1}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{S}_{\sigma\mu}(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) \tag{6.92c}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{G}^\mu$ は (6.85b) で与えられる．

(6.92c) の証明

$\bar{\mathcal{D}}^\dagger_\mu\boldsymbol{R}^\mu$ において (6.89b) の $\boldsymbol{R}^\mu$ に作用する偏微分をすべて Lorentz 共変微分に変形し直す.

$\overline{\mathcal{D}}^\dagger_\mu\boldsymbol{R}^\mu$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\mu \boldsymbol{R}^\mu + \bar{A}_\mu^\dagger \boldsymbol{R}^\mu = -\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[\partial_\mu[\bar{b}_\sigma(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \frac{1}{4}\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho] + \bar{A}_\mu^\dagger[\bar{b}_\sigma(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \frac{1}{4}\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&= -\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[(\partial_\mu\bar{b}_\sigma)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \bar{b}_\sigma\partial_\mu(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \frac{1}{4}(\partial_\mu\bar{S}_{\sigma\nu})\psi_\rho + \frac{1}{4}\bar{S}_{\sigma\nu}\partial_\mu\psi_\rho \\
&\qquad - A_\mu^\dagger\bar{b}_\sigma(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) - \frac{1}{4}A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big]
\end{aligned}
\tag{6.93a}
$$

この式の第 1,2,5 項の和は $-\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ を除いて，

$$
\begin{aligned}
&(\bar{b}_{\sigma||\mu} - \bar{b}_\sigma\bar{A}_\mu)(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \bar{b}_\sigma\partial_\mu\partial_\nu\psi_\rho + \bar{b}_\sigma(\partial_\mu A_\nu)\psi_\rho + \bar{b}_\sigma A_\nu\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{b}_\sigma A_\nu A_\mu\psi_\rho \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\bar{S}_{\sigma\mu}(\mathcal{D}_\nu\psi_\rho) + \frac{1}{2}\bar{b}_\sigma F_{\mu\nu}\psi_\rho
\end{aligned}
\tag{6.93b}
$$

となる．ただし，矢印は因子 $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ の存在のため成り立つことを意味する．$F_{\mu\nu}$ は (6.51) で定義される Lorentz ゲージ場の強さである．また，(6.93a) の残りの第 3, 4, 6 項は，やはり $-\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ を除くがその反対称性を使って，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big[\{(\partial_\mu\bar{b}_{\sigma||\nu})\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\} + \bar{S}_{\sigma\nu}(\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - A_\mu\psi_\rho) - A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\{\Big(\partial_\mu(\partial_\nu\bar{b}_\sigma - \bar{b}_\sigma A_\nu - A_\nu^\dagger\bar{b}_\sigma)\Big)\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\} \\
&\qquad + \bar{S}_{\sigma\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\nu}A_\mu\psi_\rho - A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\Big[\{\Big(-(\partial_\mu\bar{b}_\sigma)A_\nu - \bar{b}_\sigma\partial_\mu A_\nu - (\partial_\mu A_\nu^\dagger)\bar{b}_\sigma - A_\nu^\dagger(\partial_\mu\bar{b}_\sigma)\Big)\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\} \\
&\qquad + \bar{S}_{\sigma\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\nu}A_\mu\psi_\rho - A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\Big\{\Big\{-\bar{b}_{\sigma||\mu}A_\nu - \bar{b}_\sigma A_\mu A_\nu - A_\mu^\dagger\bar{b}_\sigma A_\nu - \bar{b}_\sigma\partial_\mu A_\nu - (\partial_\mu A_\nu^\dagger)\bar{b}_\sigma \\
&- A_\nu^\dagger(\bar{b}_{\sigma||\mu} + \bar{b}_\sigma A_\mu + A_\mu^\dagger\bar{b}_\sigma)\Big\}\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\Big\} + \bar{S}_{\sigma\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\nu}A_\mu\psi_\rho + \bar{A}_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\Big[\Big\{\Big\{-\bar{b}_{\sigma||\mu}A_\nu - \frac{1}{2}\bar{b}_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger\bar{b}_\sigma - A_\nu^\dagger\bar{b}_{\sigma||\mu}\Big\}\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\Big\} \\
&\qquad + \bar{S}_{\sigma\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\nu}A_\mu\psi_\rho - A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\Big[\Big\{\Big\{\bar{b}_{\sigma||\nu}A_\mu - \frac{1}{2}\bar{b}_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^\dagger\bar{b}_\sigma - A_\nu^\dagger\bar{b}_{\sigma||\mu}\Big\}\psi_\rho - (\nu\leftrightarrow\sigma)\Big\} \\
&\qquad + \bar{S}_{\sigma\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\nu}A_\mu\psi_\rho - A_\mu^\dagger\bar{S}_{\sigma\nu}\psi_\rho\Big] \\
&\longrightarrow \frac{1}{4}\Big[-\bar{b}_\sigma F_{\mu\nu}\psi_\rho - F_{\mu\nu}^\dagger\bar{b}_\sigma\psi_\rho - \bar{S}_{\sigma\mu}\mathcal{D}_\nu\psi_\rho\Big]
\end{aligned}
\tag{6.93c}
$$

(6.93a) は (6.93b)+(6.93c) に $-\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ を掛けたもので与えられるから，結局，

$$\overline{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mu}\boldsymbol{R}^{\mu} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}[(\bar{b}_{\sigma}F_{\mu\nu} - F^{\dagger}_{\mu\nu}\bar{b}_{\sigma})\psi_{\rho} - \bar{S}_{\sigma\mu}(\mathcal{D}_{\nu}\psi_{\rho})] \tag{6.93d}$$

が得られる．ここで，(6.85b) の $\boldsymbol{G}^{\mu}$ が (6.86i) で与えられることを使うと，

$$\boldsymbol{G}^{\rho} = \frac{i}{2}\boldsymbol{E}^{\rho\mu\nu\sigma}(F_{\mu\nu}b_{\sigma} - b_{\sigma}F^{\dagger}_{\mu\nu}) \tag{6.93e}$$

となることが公式 (6.5b) および

$$\begin{aligned}\eta_{sk}\varepsilon^{mnrs}\varepsilon^{ijkl} &= \eta^{mi}\eta^{nj}\eta^{rl} + \eta^{mj}\eta^{nl}\eta^{ri} + \eta^{ml}\eta^{ni}\eta^{rj} \\ &\quad - \eta^{mj}\eta^{ni}\eta^{rl} - \eta^{ml}\eta^{nj}\eta^{ri} - \eta^{mi}\eta^{nl}\eta^{rj}\end{aligned} \tag{6.93f}$$

を使って証明できる．(6.93e) の $\boldsymbol{G}^{\mu}$ を (6.93d) に代入すれば，(6.92c) が導かれる．ただし，$\bar{F}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ である．□

運動方程式 (6.91) が成り立つときは，

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu}\psi^{\dagger}_{\nu} - \psi_{\nu}\psi^{\dagger}_{\mu}) \tag{6.94a}$$

$$\psi_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu}\psi_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu}\psi_{\mu} \tag{6.94b}$$

とおいて，(6.92c) は

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mu}\boldsymbol{R}^{\mu} = -\frac{i\kappa}{8}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}[(\overline{\psi_{\rho\sigma}\psi^{\dagger}_{\nu} + \psi_{\nu}\psi^{\dagger}_{\rho\sigma}})\psi_{\mu} + \bar{C}_{\sigma\mu}\psi_{\nu\rho}] \quad (\text{質量殻上で}) \tag{6.95}$$

のように変形できる．ところで，任意の $SL(1,\mathbb{H}^c)$ Majorana スピノル ε (局所 Lorentz 変換のもとで，$\varepsilon \to U\varepsilon$ と変換する) に対して，次の公式が成り立つ．

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\{\bar{\psi}_{\rho}(\varepsilon\psi^{\dagger}_{\nu} - \psi_{\nu}\varepsilon^{\dagger}) - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(\psi_{\rho}\psi^{\dagger}_{\nu} - \psi_{\nu}\psi^{\dagger}_{\rho})\} = 0, \quad \psi_{\mu}\bar{b}_1 = \psi_{\mu}, \quad \varepsilon\bar{b}_1 = \varepsilon \tag{6.96}$$

ここで，$\varepsilon = i\psi_{\sigma\mu}$ とおいて σ, μ について和をとり，その四元数共役をとれば，添字を入れ替えて (6.95) の右辺がゼロになることが分かる．

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mu}\boldsymbol{R}^{\mu} = 0 \qquad (\text{質量殻上で}) \tag{6.97}$$

<u>(6.96) の証明</u>

(6.96) はいわゆる Fierz の恒等式に対応する[25)]ものであるが，四元数の場合の証明は極めて簡単である．はじめに

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_{\rho}\psi_{\nu}\varepsilon^{\dagger} = 0 \tag{6.98a}$$

が成り立つことに注意する．なぜなら，(6.98a) の左辺には，因子 $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ の存在のため，$\bar{\psi}_\rho\psi_\nu - \bar{\psi}_\nu\psi_\rho$ が含まれるが，これは実である：$\overline{(\bar{\psi}_\rho\psi_\nu - \bar{\psi}_\nu\psi_\rho)} = -\bar{\psi}_\nu\psi_\rho + \bar{\psi}_\rho\psi_\nu$．ところが，Majorana 条件のため，$\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_\rho\psi_\nu] = \mathrm{Re}\,[\overline{(\psi_\rho\bar{b}_1)}(\psi_\nu\bar{b}_1)] = -\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_\rho\psi_\nu] = 0$ となるから．従って，(6.96) は

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho(\varepsilon\psi_\nu^\dagger) = \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\varepsilon}(\psi_\rho\psi_\nu^\dagger) \tag{6.98b}$$

を意味する．$(\varepsilon\psi_\nu^\dagger) = b^i(\varepsilon\psi_\nu^\dagger)_i$ とおけば，容易に $(\varepsilon\psi_\nu^\dagger)_i = \mathrm{Re}\,[\psi_\nu^\dagger\bar{b}_i\varepsilon]$ がわかる．従って，(6.98b) の左辺は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho(\varepsilon\psi_\nu^\dagger) &= \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho b_i \mathrm{Re}\,[\psi_\nu^\dagger\bar{b}^i\varepsilon] = \boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\psi_\nu^\dagger\bar{b}^i\varepsilon]\bar{\psi}_\rho b_i \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}(\psi_\nu^\dagger\bar{b}^i\varepsilon - \bar{\varepsilon}b^i\bar{\psi}_\nu^\dagger)\bar{\psi}_\rho b_i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\varepsilon}b^i\bar{\psi}_\nu^\dagger\bar{\psi}_\rho b_i\end{aligned} \tag{6.98c}$$

となる．ここで，Majorana 条件から来る $\varepsilon\bar{\psi}_\rho = (\varepsilon\bar{b}_1)\overline{(\psi\bar{b}_1)}_\rho = -\varepsilon\bar{\psi}_\rho = 0$ を用いた．(6.98c) の右辺は，$b^i(\bar{\psi}_\nu^\dagger\bar{\psi}_\rho)b_i = -b^i\overline{(\psi_\rho\psi_\nu^\dagger)}b_i = -2\psi_\rho\psi_\nu^\dagger$ に注意して[26] (6.98b) の右辺を与える．このようにして，(6.96) が証明された ((6.96) 第 1 項の因子 $(\varepsilon\psi_\nu^\dagger - \psi_\nu\varepsilon^\dagger)$ を反エルミートに選んだのは，Fierz の恒等式[25] に対応させるため)．

なお (6.98b) の証明のときには，因子 $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ の反対称性を使っていない．それ故，(6.98b) は

$$\bar{\psi}_\rho(\varepsilon\psi_\nu^\dagger) = \bar{\varepsilon}(\psi_\rho\psi_\nu^\dagger) \tag{6.98d}$$

を意味する[27]．この式の左辺 $= \bar{\psi}_\rho b_i \mathrm{Re}\,[\psi_\nu^\dagger\bar{b}^i\varepsilon] = (1/2)[\psi_\nu^\dagger\bar{b}^i\varepsilon - \bar{\varepsilon}b^i\bar{\psi}_\nu^\dagger]\bar{\psi}_\rho b_i = -(1/2)[\bar{\varepsilon}b^i\bar{\psi}_\nu^\dagger]\bar{\psi}_\rho b_i = -(1/2)(-2)\bar{\varepsilon}\psi_\rho\psi_\nu^\dagger =$ 右辺だから．ここで，$\varepsilon\bar{\psi}_\rho = 0$ を使った．□

(6.84) のモデルは一般座標変換，局所 Lorentz 変換のもとで不変だけでなく，局所超対称性をも持つ．後者はラグランジアン密度 (6.84) の形だけからは見かけ上明白でない．むしろ，局所超対称性を持つように，変分 $\delta_{b^\mu}, \delta_{A_\mu}, \delta_{\psi_\mu}$ を決めるという方針で臨む．その目的で，(6.85)，(6.87)，(6.89) を加えた表式を全微分項は除いて眺める．その際，(6.89a) の実部の中は四元数共役をとる方がよい．すると，$\boldsymbol{R}^\mu, \psi_\mu$ 共に Grassmann 変数であることから符号に注意して，

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} &\equiv (\delta_{b^\mu} + \delta_{A_\mu} + \delta_{\psi_\mu})\boldsymbol{\mathcal{L}} \\ &= \mathrm{Re}\,[(-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu + \boldsymbol{T}^\mu)\delta\bar{b}_\mu + \{(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{H}^\mu - \boldsymbol{S}^\mu)\delta A_\mu - \bar{\boldsymbol{R}}^{\mu\,\dagger}\delta\bar{\psi}_\mu + \mathrm{h.c.}\}]\end{aligned} \tag{6.99}$$

を得る．これが (スカラー密度の全微分項を除いて) ゼロになるように $\delta_{\phi^\mu}, \phi^\mu = b^\mu, A^\mu, \psi^\mu$ を決めるのである．その出発点は，$\varepsilon = \varepsilon(x)$ を Majorana 条件を満たす $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルとして，

$$\delta\psi_\mu = 2\mathcal{D}_\mu\varepsilon, \quad \varepsilon\bar{b}_1 = \varepsilon \tag{6.100}$$

を仮定することである．この変換は (6.72) の共変化である．変換のパラメータ ε はそこの $k\varepsilon$ のことで，質量次元 +1/2 を持つ．これを (6.99) に代入する．変換のパラメータ ε を含む項は，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[-\bar{\boldsymbol{R}}^{\mu\,\dagger} 2\overline{\mathcal{D}_\mu\varepsilon} + \mathrm{h.c.}] &= \mathrm{Re}[-2\bar{\boldsymbol{R}}^{\mu\,\dagger}(\partial_\mu\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}A_\mu) + \mathrm{h.c.}\}] \\ &= \mathrm{Re}[2(\mathcal{D}_\mu\bar{\boldsymbol{R}}^{\mu\,\dagger})\bar{\varepsilon} + \mathrm{h.c.}\}] + (\text{全微分項})\end{aligned}$$

とかき直される．ここに現れる $\mathcal{D}_\mu\bar{\boldsymbol{R}}^{\mu\,\dagger}$ に (6.92c) (の四元数共役かつエルミート共役) を使うと，(6.99) には次のような $\boldsymbol{G}^\mu$ を含む項が生ずる．

$$\mathrm{Re}\,[-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu\delta\bar{b}_\mu + i\boldsymbol{G}^\mu\bar{\psi}^\dagger_\mu\bar{\varepsilon} - i\varepsilon^\dagger\bar{\psi}^\dagger_\mu\boldsymbol{G}^\mu] = -\frac{1}{\kappa}\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{G}^\mu\{\delta\bar{b}_\mu - i\kappa(\bar{\psi}^\dagger_\mu\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_\mu)\}]$$

これをゼロにするような δb_μ は

$$\delta b_\mu = -i\kappa(\varepsilon\psi^\dagger_\mu - \psi_\mu\varepsilon^\dagger) \tag{6.101}$$

で与えられる．これは (6.79) で $k\varepsilon \to \varepsilon$ として $k^{-2} = \kappa$ とおいたものに他ならない．こうすると，(6.99) の残りの項は，全微分項を除いて，

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{T}^\mu\delta\bar{b}_\mu + \{(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{H}^\mu - \boldsymbol{S}^\mu)\delta A_\mu - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}S_{\mu\rho}(\overline{\mathcal{D}_\lambda\psi_\nu})^\dagger\bar{\varepsilon} + \mathrm{h.c.}\}] \tag{6.102}$$

となる．この式に $\boldsymbol{T}^\mu$ の定義 (6.85d)，$\boldsymbol{H}^\mu$ の定義 (6.87b)，$\boldsymbol{S}^\mu$ の定義 (6.87e) を代入する．その際，(6.94) の記号を用いて，

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,\Big[&(\bar{\psi}^\dagger_{\nu\rho}\bar{\psi}_\sigma + \bar{\psi}^\dagger_\sigma\bar{\psi}_{\nu\rho})\delta b_\mu \\ &+ \Big(\{-\frac{2i}{\kappa}S_{\sigma\nu}\bar{b}_\rho - 2C_{\sigma\nu}\bar{b}_\rho\}\delta A_\mu + S_{\mu\rho}\bar{\psi}^\dagger_{\sigma\nu}\bar{\varepsilon} + \mathrm{h.c.}\Big)\Big]\end{aligned} \tag{6.103}$$

が得られる．この式に現れる δb_μ は既に (6.101) で決められたので，恒等式 (6.96) を使うと，δb_μ を含む項は $(-i\kappa/4)\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}^\dagger_{\nu\rho}\bar{\varepsilon}C_{\sigma\mu} - \mathrm{h.c.}]$ となるから，(6.103) は

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = \frac{1}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,\Big[(C_{\sigma\nu} + \frac{i}{\kappa}S_{\sigma\nu})(-2\bar{b}_\rho\delta A_\mu - i\kappa\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\mu\rho}) + \mathrm{h.c.}\Big] \tag{6.104}$$

のようにまとめることができる．$C_{\sigma\nu}+(i/\kappa)S_{\sigma\nu}=0$ は運動方程式 (6.91b) なので，それが成り立つときは自動的に $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}=0$ となる[28)]が，それを仮定しないで $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}=0$ を要求すると，

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{b}_\rho\delta A_\mu=\frac{i\kappa}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\rho\mu} \tag{6.105a}$$

が得られる．この解は

$$\delta A_\mu=\frac{i\kappa}{2}\psi_{\mu\nu}\varepsilon^\dagger\bar{b}^\nu+\frac{i\kappa}{12}\psi_{\rho\sigma}\varepsilon^\dagger\bar{b}^\sigma b^\rho\bar{b}_\mu-\mathrm{Re}\,[\,\cdot\,] \tag{6.105b}$$

で与えられる．

(6.105b) の証明

(6.105b) の最後の Re [·] は δA_μ を (複素) 純四元数にするためのもので，必要になるまで以下の計算では省略する．まず，(6.105a) の $\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ を次の公式

$$\boldsymbol{E}_{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\lambda\tau}=-2(\delta_\rho{}^\lambda\delta_\sigma{}^\tau-\delta_\sigma{}^\lambda\delta_\rho{}^\tau) \tag{6.106a}$$

によって消去する．その結果

$$\bar{b}_\rho\delta A_\sigma-\bar{b}_\sigma\delta A_\rho=i\kappa\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\rho\sigma} \tag{6.106b}$$

を得る．この式の左から b^ρ をかけ，ρ について和をとると，$b^\rho\bar{b}_\rho=-4, b^\rho\bar{b}_\sigma=-b_\sigma\bar{b}^\rho-2\delta^\rho{}_\sigma$ であるから，

$$\delta A_\sigma-\frac{1}{2}b_\sigma(\bar{b}^\rho\delta A_\rho)=-\frac{i\kappa}{2}b^\rho\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\rho\sigma} \tag{6.106c}$$

ここで，再び左から $\bar{b}^\sigma$ をかけると，

$$\bar{b}^\rho\delta A_\rho=-\frac{i\kappa}{6}\bar{b}^\sigma b^\rho\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\rho\sigma} \tag{6.106d}$$

これを (6.106c) に代入して

$$\delta A_\mu=\frac{i\kappa}{2}b^\rho\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\mu\rho}-\frac{i\kappa}{12}b_\mu\bar{b}^\sigma b^\rho\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\rho\sigma} \tag{6.106e}$$

この式で四元数共役をとり，Grassmann 性から来る符号の変化を考慮に入れると，(6.105b) が得られる．ただし，$\overline{\delta A}_\mu=-\delta A_\mu$ となるように要請した．□

このようにして，局所超対称変換 (6.100)，(6.101)，(6.105b) のもとで，ラグランジアン密度 (6.84) は全微分だけしか変化しない，従って，(6.84) から定義される作用は局所超対称性をもつことが四元数計算規則のみで証明された．

b^μ と ψ_μ に対する局所超対称変換の交換子積代数を求めることもできるが，

ここでは省略する．前節最後のところで述べたように，質量殻外でのボソン場とフェルミオン場の自由度は各々 6 と 12 であった．フェルミオン場の自由度を増やさずに，この相違を無くすには，ボソン場の自由度を 6 増やして計 12 にしなければならない．増やされたボソン場は物理的モードに対応しない補助場で，(6.63) の F のようにラグランジアンに運動エネルギー項をもたない．この点についてもこれ以上深入りしない．

6.5 重力微子の質量と宇宙定数

もし，(6.84) のモデル・ラグランジアン密度において，零質量の Rarita-Schwinger ラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0)}_{R\text{-}S}$ を有質量のラグランジアン密度

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(\mathbf{0})}{}_{R\text{-}S} - \frac{im}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_\mu b_\rho \bar{b}_\sigma \psi_\nu b_3 - \mathrm{h.c.}] \tag{6.107}$$

におき換えると，ラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0)}_G + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S}$ は最早前節の局所超対称性を持たないことは明らかである．ところが，宇宙項を付け加えた重力場のラグランジアン密度

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_G = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(\mathbf{0})}{}_G + \lambda b \tag{6.108}$$

を定義して，

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \boldsymbol{\mathcal{L}}_G + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{R\text{-}S} \tag{6.109}$$

をモデル・ラグランジアン密度に選ぶと，関係式

$$\kappa\lambda = 3m^2 \tag{6.110}$$

が成り立つとき，修正された局所超対称性が満たされることが指摘されている[29]．宇宙項は重力子に質量を与えないので，局所超対称性は重力微子も零質量に留まることを要求する：$m = 0$．従って，局所超対称性は (6.110) から必然的に宇宙定数がゼロになることを要求するといえる．この節では，この結論がどのように導かれるかを駆け足で見ていこう．重力微子が質量を獲得するにも拘わらず，宇宙定数はゼロに留まるという，局所超対称性の自発的破れの考えも提案されている[30]．

変分 $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ は，(6.99) 式で，$\boldsymbol{G}^\mu, \boldsymbol{T}^\mu, \boldsymbol{H}^\mu, \boldsymbol{S}^\mu, \bar{\boldsymbol{R}}^\mu$ すべてにダッシュをつけた

もので与えられる．ただし，

$$\boldsymbol{G}'^{\mu} = \boldsymbol{G}^{\mu} + \kappa\lambda b b^{\mu} \tag{6.111a}$$

$$\boldsymbol{T}'^{\mu} = \boldsymbol{T}^{\mu} + \frac{im}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}(\psi_{\nu} b_3 \bar{\psi}_{\sigma} b_{\rho} - \mathrm{h.c.}) \tag{6.111b}$$

$$\boldsymbol{H}'^{\mu} = \boldsymbol{H}^{\mu} \tag{6.111c}$$

$$\boldsymbol{S}'^{\mu} = \boldsymbol{S}^{\mu} \tag{6.111d}$$

$$\boldsymbol{R}'^{\mu} = \boldsymbol{R}^{\mu} + \frac{im}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{b}_{\rho} b_{\sigma} \bar{\psi}^{\dagger}_{\nu} b_3 \tag{6.111e}$$

である．このとき，(6.92c) は

$$\overline{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mu}\boldsymbol{R}'^{\mu} = \overline{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mu}\boldsymbol{R}^{\mu} - \frac{im}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}[\bar{S}_{\rho\mu} b_{\sigma}\bar{\psi}^{\dagger}_{\nu} + \bar{b}_{\rho} S_{\sigma\mu}\bar{\psi}^{\dagger} + \bar{b}_{\rho} b_{\sigma}\bar{\psi}^{\dagger}_{\mu\nu}] b_3 \tag{6.112}$$

となることがわかる．そこで，$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \partial_{\mu}\boldsymbol{d}^{\mu}$ となるための条件を求める．変分 $\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ に含まれる $\delta_{\psi_{\mu}}\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \mathrm{Re}\,[-\bar{\boldsymbol{R}}'^{\mu\,\dagger}\delta\bar{\psi}_{\mu} + \mathrm{h.c.}]$ をまず考える．もしここで，Rarita-Schwinger 場の変分 (6.100) をそのまま使うと，$\boldsymbol{G}^{\mu}$ を含む項は，丁度 (6.101) のお陰で全微分項になるが，$\boldsymbol{G}'^{\mu}$ にある宇宙定数を含む項を消去することができない．(6.101) は変えるわけにいかない[31]から，Rarita-Schwinger 場の変分は (6.100) の代わりに，

$$\delta\psi_{\mu} = 2\mathcal{D}_{\mu}\varepsilon + imb_{\mu}\bar{\varepsilon}^{\dagger} b_3 \tag{6.113}$$

のように変える必要が生まれる．ここで，m に比例する第 2 項の形は殆ど一意的に決まる．まず，ψ_{μ} は座標ベクトルゆえ，b_{μ} が存在しなければならない．次に，ψ_{μ} は Lorentz スピノルなので，$b_{\mu} \to U b_{\mu} U^{\dagger}$ の後ろに来る因子を消すために，Lorentz スピノル ε は上の形で b_{μ} の後ろにもってくる必要がある．最後に，ψ_{μ} も ε も Majorana スピノルなので，右から $\bar{b}_1$ をかけても変わらない．$\bar{\varepsilon}^{\dagger} b_3$ は確かにこの条件も満たす．(6.113) を $\delta_{\psi_{\mu}}\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ に代入すると，$m^s, s = 0, 1, 2$ に比例する項が出てくる．m を含まない項は既に計算した．m^2 を含む項は

$$\frac{m^2}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\,[\bar{b}_{\mu} b_{\rho}\bar{b}_{\sigma}\psi_{\nu}\varepsilon^{\dagger} + \mathrm{h.c.}] = \mathrm{Re}\,[3im^2 b\bar{b}^{\nu}(\psi_{\nu}\varepsilon^{\dagger} - \varepsilon\psi^{\dagger}_{\nu})] \tag{6.114a}$$

となる．最後の式で，Levi-Civita テンソル密度が消えた理由は，

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma} b_{\mu}\bar{b}_{\nu} b_{\rho} = -6ib b^{\sigma} \tag{6.114b}$$

の結果である．m に比例する項は最終的に δA_μ を決める式に現れる．それは Levi-Civita テンソル密度が消えないからである．それ故，(6.114a) は $\delta_{b_\mu}\boldsymbol{\mathcal{L}}'$ の中の，宇宙項と相殺せねばならない．後者は

$$\mathrm{Re}\left[(-\lambda bb^\mu)\delta\bar{b}_\mu\right] = \mathrm{Re}\left[i\kappa\lambda b\bar{b}^\mu(\varepsilon\psi_\mu^\dagger - \psi_\mu\varepsilon^\dagger)\right] \tag{6.114c}$$

であるから，この相殺条件から，(6.110) を得る．このように，ラグランジアン・レベルの局所超対称性の要請から，宇宙定数は重力微子の質量の 2 乗に比例することがわかった．しかしながら，6.3 節の最後で見たように，重力微子が質量を持てば，自由度が 4 になって，重力子の自由度 2 とあわない．それ故，局所超対称性がラグランジアン・レベルだけでなく，スペクトルにおいても成り立つためには，$m=0$ でなくてはならない．その結果，(6.110) から，$\lambda=0$，則ち宇宙定数はゼロになる．なお，m に比例する項を計算して，最終的に (6.104) は次式に変更される．

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}' = \frac{1}{4}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Re}\Big[&(C_{\sigma\nu} + \frac{i}{\kappa}S_{\sigma\nu})(-2m\kappa\bar{b}_\sigma(\psi_\nu b_3\bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon b_3\bar{\psi}_\nu)\\ &-2\bar{b}_\rho\delta A_\mu + i\kappa\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\mu\rho}) + \mathrm{h.c.}\Big]\end{aligned} \tag{6.115}$$

これから運動方程式を使わなければ，δA_μ を決める式

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}(\bar{\varepsilon}^\dagger\bar{\psi}_{\nu\sigma} + 2im\bar{b}_\sigma(\psi_\nu b_3\bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon b_3\bar{\psi}_\nu) + \frac{2i}{\kappa}\bar{b}_\sigma\delta A_\nu) = 0 \tag{6.116}$$

が得られる．$m=0$ とおけば，これはもちろん (6.105a) に一致する．

以上，超重力理論においても，四元数の計算規則は矛盾のない記法であることを見てきた．Dirac 行列を使う 4 成分スピノル表示にもとづく計算ルールは場の量子論の王道であることは誰も疑わない．けれども，その柔軟性のゆえに，場の変換性に関して，自由度が多すぎるとも言える．自然はその中で特定の場しか用意していないのは明らかである．その観点から四元数形式の特徴を強いて挙げれば

1. 局所 Lorentz 系での変換性を示すラテン添字 (含スピノル添字) が定義のときを除いて消えたこと (計算上あるいは最終結果を 4 成分形式に翻訳するときには当然必要)
2. その結果，場の変換のタイプを強く制限していること，実際，内部対称性

に関するゲージ場は，Dirac スピノル場と同じ意味で，四元数座標スカラー場とみなせるが，3 種類しかない四元数座標ベクトル場 (四元数四脚場と同じ変換則に従う一般な四元数座標ベクトル場は除く) をすべて外部対称性に関するゲージ場とみなせること

3. Dirac のガンマ行列を使わない代数計算であるが，必ずスピノルの 4 成分表示に移れること

4. Majorana 条件 $\psi\bar{b}_1 = \psi$ が古典論で既に線形であること

が言える．特徴 1. の結果，四元数変分原理は限られた範囲ではあるが，添字との格闘をかなり和らげてはくれる．しかし，物理的解釈を得るには 4 成分表示に移行するために辞書に代るものを用意しておかねばならない．その上，

5. 現在のところ，古典論の範疇に留まっている

のが，致命的な欠点である．量子論においては複素関数論が必須であるから，4 成分形式への移行は当然必要である．この問題は前章で詳論したが，その際，実四元数行列の集合 $Spin(2,\mathbb{H})$ から出発して，四元数と可換な新しい虚数単位が導けるという 4.5 節の結論が本質的であった．従って，四元数アプローチは単に Pauli 行列の代わりに複素四元数を計算技術の上でのみ使っているに過ぎないという批判は最早当たらない．なぜなら，$Spin(2,\mathbb{H})$ スピノル (四元数 Dirac スピノル) から $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノル (複素四元数 Dirac スピノル) を経て，Weyl スピノルが Pauli 行列に頼らず導けたからである．Pauli 行列は四元数の乗積表からえられる公式 (4.67) に顔を出し，公式 (4.68) が 4 成分形式への移行を助けるのである．

第 6 章の注および参考文献

1) この式は (5.40b,d) の Lorentz 変換と同じである．場の引数の x はある時空点を表す座標値であるが，等価原理により，その点で局所 Lorentz 系が選べる．その系から見た座標値は例えば，$X^i(x)$ とかける．このとき，局所 Lorentz 系における Lorentz 変換は $X^i(x) \to X^{i\prime}(x) = \Lambda^i{}_j X^j(x)$ で与えられる．ただし，$\Lambda = (\Lambda^i{}_j) \in L_+^\uparrow$．だから，場の引数を，考えている局所 Lorentz 系で $X(x)$ とかけば，(6.9) は $\psi'(X'(x)) = U\psi(X(x))$ などとなる．それ故，(6.9a,b) の左辺の引数 x にはダッシュがない．なお，この Lorentz 変換を局所的 $U = U(x)$ にできる．これは，四脚場は一意的に計量テンソルを決めるが，全時空間に分布する四脚場を各時空点で独立に Lorentz 変換しても，同じ計量テンソルが得られるという事実による．

2) Minkowski 時空における Rarita-Shwinger 場 $\psi_i{}^j$ は Lorentz 群の表現 $D^{(1/2,1/2)} \otimes (D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)})$ に属する．それの従う運動方程式と既約性の条件からスピン 3/2 の成分のみを取り出す方法については，第 6.3 節で述べる．

3) 四脚場 $b_i{}^\mu(x)$ とは，時空の各点において定義される $i = 0, 1, 2, 3$ で区別される 4 個の互いに直交する単位ベクトルの組 (定義 (6.13a)) で，1 つは時間的，他の 3 つは空間的である．それは計量テンソルの ‘平方根 ’ である (公式 (6.29b) を見よ).
四脚場を四元数場で表す試みは，
M. Sachs, ‘*General Relativity and Matter*’, D. Reidel Publishing Company (1982).
においてなされた．Sachs はテキストの四元数四脚場 $b^\mu(x)$(の符号を変えたもの) を**四元数計量変数**と呼んでいる．
普通四脚場という場合は，(6.12b) の Lorentz 変換は局所的とする，$\Lambda_i{}^j = \Lambda_i{}^j(x)$. (6.12b) の Lorentz 変換がその式で示されているように大域的の場合には，大域的四脚場というべきである．本文では，特に，混同のおそれがない限り，単に四脚場と呼ぶ．
Einstein の重力理論の四脚場による定式化については，例えば，
L. D. Landau and E. M. Lifshitz,『場の古典論』(原書第 6 版)，恒藤敏彦・広重徹訳，§98 (1983).
S. Weinberg, 第 2 章文献 3), 12-5.
に解説がある．以下で四脚場についての文献を手元にある代表的なものだけ引用する．
遠隔平行性の概念によって，4 脚場 (一般に n-脚場) を導入したのは，
A. Einstein, ‘Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelisms’, Situngsber. Preuss. Akad. Wiss.(1928), pp.217-221.
である．この論文及び関連した論文は内山龍雄による和訳が次の書籍にある．
湯川秀樹監修,『アインシュタイン選集 2 《一般相対性理論および統一場理論》』，共立出版株式会社 (1971)
四脚場はスピン 1/2 の粒子の重力相互作用を記述するためには必須である．四脚場形式についての旧い文献は W. L. Bade and H. Jehle，第 4 章文献 24) にある (それら旧

い文献は今手元にない). Weyl はそれに基づいて, Einstein の重力理論をかき変えた.
H. Weyl, 'Elektron und Gravitation', Zeit. f. Physik, **56**(1929), pp.330-352.
これは一般相対論の四脚場形式の始まりの 1 つでもある. Weyl の論文の英訳およびその解説が次の書籍にある.
L. O'Raifeartaigh, '*The Dawning of Gauge Theory*', Princeton Univ. Press (1997)
遠隔平行性にもとづく四脚場形式は重力場のエネルギーの局所化の問題に基本的役割を果たすことが Møller により論じられている.
C. Møller, 'Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity', Mat. Fys. Skr. Dan. Vid.Selsk. **1**, no.10(1961), pp.1-50.;'Tetrad fields and conservation laws in general relativity', Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", held June 19 - July 1, 1961. Course XX, sponsored by the Italian Physical Society. Edited by C. Møller (1962), pp.252-264.
そのラグランジアン形式が
C. Pellegrini and J. Plebanski, 'Tetrad Fields and Gravitational Fields', Mat. Fys. Skr. Dan. Vid.Selsk. **2**, no.4 (1963), pp.1-39.
によって議論された. 四脚場は重力のゲージ理論において本質的役割を果たす. 内山龍雄は第 5 章文献 9) で引用した論文において, 一般の Lie 群に対するゲージ理論を定式化し, それを重力の理論に応用して, 重力相互作用を初めてゲージ理論として解釈した. これを精緻化して, Poincaré ゲージ理論の基礎を築いたのは
T. W. Kibble, 'Lorentz Invariance and the Gravitational Field', Journ. Math. Phys. **2**(1961), pp.212-221.
D.W.Sciama,'On the analogy between charge and spin in general relativity ', 'Recent Developments in General Relativity (1962)', pp.415-439. (Oxford: Pergamon Press and Warszawa:PWN.)
である. その線に沿った林憲二・中野董夫による仕事
K. Hayashi and T. Nakano, 'Extended Translation Invariance and Associated Gauge Fields', Progr. Theor. Phys. **38** (1967), pp.491-507.
において, 四脚場は 4 次元推進変換群 T_4 のゲージ場に関連することが示された (四脚場自身はゲージ場でない). 次の論文では, Einstein の重力理論と等価な, 四脚場のゲージ理論を与えている.
F. A. Kaempffer, 'Vierbein Field Theory of Gravitation', Phys. Rev. **165**(1968), pp.1420-1423.
これらはその後の Poincaré ゲージ理論の発展に大きな役割を果たした.
なお, Riemann 空間に捩率を導入することにより, 空間の概念を拡張したのは, Cartan である. Cartan の 1922 年論文は G. D. Kerlick により英訳されている:
E. Cartan, '*On a generalization of the notion of Riemann curvature and spaces with torsion*', pp.489-491 in '*Cosmology and Gravitation:Spin, Torsion, Rota-*

tion, and Supergravity ', ed. by P.G. Bergmann and V. De Sabbata, Plenum Press, New Yowk (1980)
この論文には数式が 1 つもない．Cartan の仕事については，次の本がある．
E. Cartan, '*On Manifolds with an affine connection and the theory of general relativity*', A. Magnon と A. Ashtekar による英訳 (Napoli:Bibliopolis, 1986).

4) ここでなぜ b が必要かについて，念のため述べておく．理論の一般共変性は，無限小一般座標変換 $x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu(x)$ のもとでの作用の不変性 $\delta S = \delta \int d^4x\boldsymbol{\mathcal{L}} = 0$ を意味する．この変換のもとで，$d^4x \to d^4x(1+\partial_\mu \delta x^\mu)$ であることに注意すると，$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = -(\partial_\mu\delta x^\mu)\boldsymbol{\mathcal{L}} + \partial_\mu \boldsymbol{K}^\mu$, $\boldsymbol{K}^\mu$ はベクトル密度，従って，$\partial_\mu \boldsymbol{K}^\mu$ はスカラー密度，となる．ところが，$b = \det(b^i{}_\mu)$ とおけば，$\delta b^i{}_\mu(x) = -(\partial_\mu \delta x^\nu) b^i{}_\nu(x)$ なので，$\delta b = \delta \det(b^i{}_\mu) = -(\partial_\mu\delta x^\mu) b$ が示せる．従って，$\boldsymbol{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}$ を $\delta\mathcal{L} = b^{-1}\partial_\mu \boldsymbol{K}^\mu$ となるように構成しておけば，$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}} = -(\partial_\mu\delta x^\mu)\boldsymbol{\mathcal{L}} + \partial_\mu \boldsymbol{K}^\mu$ が満たされる．

5) 林・中野，文献 3)．次の論文も見よ．
Y. M. Cho, 'Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian', Phys. Rev. **D14** (1976), pp.2521-2525.
四脚場自身は斉次変換則に従うが，ゲージ場は非斉次項を持つ変換則に従う．

6) (6.10d) と (6.18) の変換則から，一般座標変換と局所 Lorentz 変換が四元数形式では全く異なるスタイルで現れることがわかる．無限小一般座標変換 $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu(x)$ は局所的な 4 次元推進変換群 T_4 を生成するが，その生成子 ∂_μ が交換することから，アーベル群である．にもかかわらず，それに付随するゲージ場 (文献 5) 参照) は本質的に相互作用場であることがわかる．それは T_4 が同じ時空点で定義される内部対称群ではなく，時空そのものに作用するからである．それに対して，(6.18) の変換則は同じ時空点で定義されているので，そのとき生ずるゲージ場は Yang-Mills のそれと比較できる．ただし，(四元数) 四脚場の存在のため，ラグランジアンの構成において，場の強さについての線形な項が存在するという特徴がある (これは後に議論する)．その結果，Poincaré ゲージ理論における局所対称群は $T_4 \times L_{int}$ という直積で与えられる．ただし，L_{int} は Lorentz 群のうちの固有スピンに関係する部分である．一方，2.4 節で定義した Poincaré 群は大域的な T_4 と Lorentz 群の半直積である．この Lorentz 群は軌道部分 L_{orb} と固有スピン部分 L_{int} を含む．このような大域的 Poincaré 群を局所化するとは，ゲージ対称群として，局所的な直積 $T_4 \times L_{int}$ を考えることであると理解されたい．これは次の論文による．
K. Hayashi and T. Shirafuji, 'Gravity from Poincaré Gauge Theory of Fundamental Particles. I', Prog. Theor. Phys. 64 (1980), pp.866-882.

7) これまでと同様，四元数計算の流れに見透しのよさを与えるため，式変形の証明などはすべて小文字にする．それらはすべて初等的計算とはいえ，この章ではギリシャ添え字・ラテン添え字両方を含むテンソル計算も含む．

8) これから，$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{ij} b^i{}_\mu b^j{}_\nu) = \det(\eta_{ij})\det(b^i{}_\mu)\det(b^j{}_\nu) = -b^2$ が

導ける．

9) この場合は，全時空に分布する四脚場によって各時空点における局所 Lorentz 系を一度決めたら，一斉に Lorentz 変換する自由度しか残らないとする必要がある．その結果，遠く離れた時空点におけるベクトルの平行性が定義されたことになる．

10) Weitzenböck 時空における一般相対性理論は，実質的には Møller, 文献 3) に始まるが，その詳細な定式化は次の論文によってなされた (**新一般相対論**と言われる)．
K. Hayashi and T. Shirafuji, 'New general relativity', Phys. Rev. **D19**(1979), pp.3524-3553.

11) これは，$d(V^\mu V_\mu) = d(g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu) = (dg_{\mu\nu})V^\mu V^\nu + g_{\mu\nu}(dV^\mu)V^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu(dV^\nu) = 0$ とかいたとき，$dg_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x+dx) - g_{\mu\nu}(x)$ を意味する．従って，計量テンソルの無限小平行移動は $g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(x) + dg_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x+dx)$ で与えられる．

12) スピン 0 の粒子からなる物質場のラグランジアンは A_μ を含まないので，A_μ の変分から導かれる運動方程式は，第 4 節で導く (6.87b) の $\boldsymbol{H}^\mu = 0$ になる．$\boldsymbol{H}^\mu$ に含まれる $S_{\rho\sigma} = b_{\rho||\nu} - b_{\nu||\rho} = \partial_\nu b_\rho + A_\rho b_\nu + b_\nu A^\dagger_\rho - (\rho \leftrightarrow \nu)$ は計量条件 (6.39) を使うと，捩率テンソルの定義 (6.40d) によって，$= (\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho})b_\lambda = T^\lambda_{\cdot\rho\nu} b_\lambda$ となる．これがゼロになることは捩率がゼロになることを要求する．逆に，そのラグランジアンに A_μ を含まない物質の系が作る重力場は Riemann 空間で記述される．マクロにはスピン自由度は平均化されて消えるので，マクロに拡がる物質は対称なエネルギー・運動量テンソルで特徴づけられ，それが生み出す重力場は Riemann 空間で記述される．Einstein のこの重力理論が Poincaré ゲージ理論の特殊なケースに含まれるということが，重力のゲージ理論を推進する上で強力な理論的支柱になっている．

13) K. Hayashi and A. Bregman, 'Poincaré Gauge Invariance and the Dynamical Role of Spin in Gravitational Theory', Ann. Phys. **75** (1973), pp.562-600.

14) ミクロな時空構造が Riemann-Cartan 時空になる可能性を追求した論文に
K. Hayashi and T. Shirafuji, 'Space-Time Structure Explored by Elementary Particles: Microscopic Origin for the Riemann-Cartan Geometry', Prog. Theor. Phys. **57** (1977), pp.302-317.
がある．

15) Poincaré ゲージ理論の総合報告は
F. W. Hehl, P. v. d. Heyde, G. D. Kerlick and J. M. Nester, 'General relativity with spin and torsion:Foundations and prospects', Rev. Mod. Phys. **48** (1976), pp.393-416.
を見られたい．なお，Poincaré ゲージ理論における，場の強さの 2 次まで含む，最も一般な重力場のラグランジアンは
K. Hayashi, 'Gauge Theories of Massive and Massless Tensor Fields', Prog. Theor. Phys. **39**(1968), pp.494-515; K. Hayashi and T. Shirafuji, 文献 6).
で与えられた．その結果を四元数形式に焼き直すこともできる．林・白藤の重力場のラグランジアンは四元数形式では，

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}^{(0)}(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}^{(1)}(K_\mu) + \mathcal{L}^{(1)}(F_{\mu\nu})$$

とかかれる．ここで，初めの 2 項は既に本文の (6.62) ($A_\mu \neq 0$) で与えられている．第 3 項は $F_{\mu\nu}$ について 2 次の項で，次の 6 項からなる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \sum_{i=1}^{6} a'_i \mathcal{L}_i^{(1)}(F_{\mu\nu}) \\
\mathcal{L}_1^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{h.c.}], \\
\mathcal{L}_2^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}b^\mu F^{\lambda\nu\,\dagger}\bar{b}_\lambda + \mathrm{h.c.}], \\
\mathcal{L}_3^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}F^{\lambda\nu}b^\mu\bar{b}_\lambda + \mathrm{h.c.}], \\
\mathcal{L}_4^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}b^\mu\bar{b}^\nu b^\rho\bar{b}^\sigma + \mathrm{h.c.}], \\
\mathcal{L}_5^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[F_{\mu\nu}b^\mu\bar{b}^\nu F_{\rho\sigma}b^\rho\bar{b}^\sigma + \mathrm{h.c.}], \\
\mathcal{L}_6^{(1)}(F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[b^\mu F^\dagger_{\mu\nu}\bar{b}^\nu F_{\rho\sigma}b^\rho\bar{b}^\sigma + \mathrm{h.c.}]
\end{aligned}$$

ただし，$a'_i(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ は実の定数である．上の $\mathcal{L}_G$ が林・白藤の重力場のラグランジアンと等価であることは次の論文で示された．

K. Morita, 'Quaternionic Formulation of Dirac Theory in Special and General Relativity', Prog. Theor. Phys. **70**(1983), pp.1648-1665.

16) 超対称性・超重力の理論とモデル構築については多くの文献がある．ここでは，

J. Wess and J. Bagger, '*Supersymmetry and Spergravity*', Princeton University Press, 1992.

S. Weinberg, '*The Quantum Theory of Fields III Supersymmetry*', Cambridge University Press, 2000.

を挙げておく．

17) よく知られた Wess-Zumino 模型のラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}\partial_i A\partial^i A - \frac{1}{2}\partial_i B\partial^i B - \frac{1}{2}\tilde{\psi}\gamma^i\partial_i\psi + \frac{1}{2}(F^2 + G^2) \\
\mathcal{L}_m &= -\frac{m}{2}\tilde{\psi}\psi + m(AF - BG) \\
\mathcal{L}_g &= \frac{g}{\sqrt{2}}[\tilde{\psi}\psi A - i\tilde{\psi}\gamma_5\psi B - (A^2 - B^2)F + 2ABG]
\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，A, B は実のスカラー場，F, G は実のスカラー補助場，ψ は 4 成分 Majorana スピノルである．4 成分スピノル ψ の Dirac 共役は $\tilde{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0$ とかいた．Majorana 条件 $\psi^c = C\tilde{\psi}^T = \psi$ のため，前章 5.8 節で述べたように，ψ と $\tilde{\psi}$ は独立には変分できない．これを四元数形式にかき換えたものが (6.63) である．た

だし, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(A+iB)\to A, \dfrac{1}{\sqrt{2}}(F+iG)\to F$ というおき換えによって複素スカラー場 A, 複素スカラー補助場 F を用いた．すなわち，逆のおき換えをして (6.63) を第 5 章 5.7 節の方法で 4 成分表示に直すと上のラグランジアンが得られる．

18) 注 17) の 4 成分表示では超対称変換が

$$\delta A = \tilde{\varepsilon}\psi, \quad \delta B = i\tilde{\varepsilon}\gamma_5\psi$$
$$\delta\psi = \gamma^i\partial_i(A+i\gamma_5 B)\varepsilon + (F-i\gamma_5 G)\varepsilon$$
$$\delta F = \tilde{\varepsilon}\gamma^i\partial_i\psi, \quad \delta G = -i\tilde{\varepsilon}\gamma_5\gamma^i\partial_i\psi$$

で与えられる．これを四元数形式にかき換えたものが (6.66) である．実際，

$$\tilde{\varepsilon}\psi = \mathrm{Re}\,[(\bar{\psi}\varepsilon + \varepsilon^\dagger\bar{\psi}^\dagger)b_3], \quad -\tilde{\varepsilon}\gamma_5\psi = \mathrm{Re}\,[(\bar{\psi}\varepsilon - \varepsilon^\dagger\bar{\psi}^\dagger)b_3]$$

から (6.66a) が導かれる．同じ記号を使ったが，左辺はいずれも 4 成分スピノル，右辺はいずれも $SL(1,\mathbb{H}^c)$ スピノルである (以下の公式においても同じ記法を用いる)．同様にして，

$$-\tilde{\varepsilon}\gamma^i\partial_i\psi = \mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger(i\bar{\partial}\psi) + (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\varepsilon], \quad -\tilde{\varepsilon}\gamma_5\gamma^i\partial_i\psi = \mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger(i\bar{\partial}\psi) - (i\bar{\partial}\psi)^\dagger\varepsilon]$$

から (6.66c) が導かれる．(6.66b) が上の $\delta\psi$ の表式と等価であることを見るには，

$$\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi^\alpha \\ \bar{\eta}_{\dot\alpha}\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger\begin{pmatrix}\psi \\ \bar{\psi}^\dagger\end{pmatrix}\right], \quad -\frac{1}{2}\gamma_5\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\xi^\alpha \\ -\bar{\eta}_{\dot\alpha}\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger\begin{pmatrix}\psi \\ -\bar{\psi}^\dagger\end{pmatrix}\right]$$
$$-\frac{i}{2}\gamma^i\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i\bar{\eta}_{\dot\alpha} \\ \bar{\sigma}^i\xi^\alpha\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger\begin{pmatrix}b^i\bar{\psi}^\dagger \\ \bar{b}^i\psi\end{pmatrix}\right],$$
$$-\frac{i}{2}\gamma_5\gamma^i\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i\bar{\eta}_{\dot\alpha} \\ -\bar{\sigma}^i\xi^\alpha\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[v_\alpha^\dagger\begin{pmatrix}b^i\bar{\psi}^\dagger \\ -\bar{b}^i\psi\end{pmatrix}\right]$$

となることを使えばよい．ただし，v_α は (4.65) で定義されたスプリット基底であり，公式 (4.67)，(4.68) を利用した．

19) 周知のようにこの関係は，4 成分表示では Fierz の公式 $(\tilde{\psi}\psi)(\tilde{\varepsilon}\psi) + (\tilde{\psi}\gamma_5\psi)(\tilde{\varepsilon}\gamma_5\psi) = 0$ から導かれる．

20) (6.68) の Noether 流は注 16) の実場 A, B, F, G を用いると，

$$J^i = (\partial_j A)\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}b^j\bar{b}^i\psi b_3 + \mathrm{h.c.}] - i(\partial_j B)\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}b^j\bar{b}^i\psi b_3 - \mathrm{h.c.}]$$
$$+\, iF\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi - \mathrm{h.c.}] + G\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi + \mathrm{h.c.}]$$

と表される．それで，注 16) の 4 成分表示への移行は，公式

$$\mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}b^j\bar{b}^i\psi b_3 + \mathrm{h.c.}] = -\tilde{\varepsilon}\gamma^j\gamma^i\psi, \quad \mathrm{Re}\,[\bar{\varepsilon}b^j\bar{b}^i\psi b_3 - \mathrm{h.c.}] = \tilde{\varepsilon}\gamma_5\gamma^j\gamma^i\psi$$
$$\mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi + \mathrm{h.c.}] = -i\tilde{\varepsilon}\gamma_5\gamma^i\psi, \quad \mathrm{Re}\,[\varepsilon^\dagger\bar{b}^i\psi - \mathrm{h.c.}] = -i\tilde{\varepsilon}\gamma^i\psi$$

を使って，

$$J^i = -\tilde{\varepsilon}[\gamma^j\partial_j(A - i\gamma_5 B) - (F - i\gamma_5 G)]\gamma^i\psi$$

と実行される．なお，普通ベクトル・スピノル流と言うときには変換のパラメータ ε の Dirac 共役を除いたものを言う．これは (3.36b) で変換のパラメータ α を除いたのと同じである．

21) 4 成分表示では $\xi^i = -2\tilde{\varepsilon}_1\gamma^i\varepsilon_2$ である．

22) やはり，第 5 章 5.7 節の方法で 4 成分表示に直すと (6.81) のラグランジアンは次のように変形される．

$$\mathcal{L}_{R\text{-}S} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{ijkl}\tilde{\psi}_i\gamma_5\gamma_j\partial_k\psi_l + \frac{m}{4}\tilde{\psi}_i(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i)\psi_j, \quad \psi_i^c = \psi_i$$

ただし，(6.81) の質量項を変形する際，公式 (6.5c) を利用した．ガンマ行列の公式

$$\gamma^i\gamma^j\gamma^k + \gamma^k\gamma^j\gamma^i = 2(\eta^{ij}\gamma^k + \eta^{jk}\gamma^i - \eta^{ik}\gamma^j)$$
$$\gamma^i\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j\gamma^i = 2i\varepsilon^{ijkl}\gamma_5\gamma_l$$

を使うと，上のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{R\text{-}S} = &-\frac{1}{2}\eta^{ij}\tilde{\psi}_i(\gamma^k\partial_k + m)\psi_j + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_i(\gamma^i\partial^j + \gamma^j\partial^i)\psi_j \\ &-\frac{1}{2}(\tilde{\psi}_i\gamma^i)(\gamma^k\partial_k - m)(\gamma^j\psi_j)\end{aligned}$$

となり，Rarita-Schwinger の原論分

W. Rarita and J. Schwinger, ‘On a Theory of Particles with Half-Integral Spin’, Phys. Rev. **60**(1941), pp.61-61.

のラグランジアンとは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{\text{original}} &= -\eta^{ij}\tilde{\psi}_i(\gamma^k\partial_k + m)\psi_j + \frac{1}{3}\tilde{\psi}_i(\gamma^i\partial^j + \gamma^j\partial^i)\psi_j \\ &\quad -\frac{1}{3}(\tilde{\psi}_i\gamma^i)(\gamma^k\partial_k - m)(\gamma^j\psi_j) \\ &= \frac{2}{3}\mathcal{L}_{R\text{-}S} - \frac{2}{3}\eta^{ij}\tilde{\psi}_i(\gamma^k\partial_k + m)\psi_j\end{aligned}$$

の関係にある．$m = 0$ のときの Rarita-Schwinger ラグランジアン $\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{(0)}$ はゲージ変換 $\psi_i \to \psi_i + \partial_i\varphi$ のもとで (発散を除いて) 不変であるが，上式最後の項の存在のため，$\mathcal{L}_{R\text{-}S}^{\text{original}}$ で $m = 0$ とおいたときのゲージ不変性は，原論分に注意してあるように，ゲージパラメータに対し条件 $\gamma^i\partial_i\varphi = 0$ をつけねばならない．超重力の理論で Rarita-Schwinger ラグランジアンといえば $\mathcal{L}_{R\text{-}S}$ のことである．

23) 四元数形式でのこの種の保存則は

K. Morita, ‘Quaternionic Variational Formalism for Poincaré Gauge Theory and Supergravity’, Prog. Theor. Phys. **73**(1985), pp.999-1015.

で与えられた．

24) 計量条件から，$\boldsymbol{H}^{\mu}$ は $b_{\rho||\nu} - b_{\nu||\rho} = (\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho})b_{\lambda} = T^{\lambda}{}_{\rho\nu}b_{\lambda}$ のように捩率テンソル (6.40d) に比例するから，運動方程式 (6.91b) は捩率が重力微子からの寄与 $(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger} - \psi_{\nu}\psi_{\rho}^{\dagger})$ に比例することを示す．すなわち，(6.91b) は代数方程式である．

25) 4 成分スピノル表示を用いた場合の，対応する Fierz の恒等式は

$$\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}(\gamma_i\psi_{\rho})(\tilde{\varepsilon}\gamma^i\psi_{\nu}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mu\nu\rho\sigma}(\gamma_i\varepsilon)(\tilde{\psi}_{\rho}\gamma^i\psi_{\nu})$$

である．

26) $(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger}) = b^k(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger})_k$ とおけば，$b^i(\bar{\psi}_{\nu}^{\dagger}\bar{\psi}_{\rho})b_i = -b^i\overline{(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger})}b_i = -(b^i\bar{b}^k b_i)(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger})_k$ $= -2b^k(\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger})_k = -2\psi_{\rho}\psi_{\nu}^{\dagger}$.

27) 2 成分スピノルに対する Fierz の恒等式

$$\bar{\sigma}_i\psi_{\rho}(\psi_{\nu}^{\dagger}\bar{\sigma}^i\varepsilon) = \bar{\sigma}_i\varepsilon(\psi_{\nu}^{\dagger}\bar{\sigma}^i\psi_{\rho})$$

に対応する．

28) 運動方程式 (6.91b) を使う 1.5 階方式ではこの方法を採用するが，そのとき δA_{μ} は運動方程式 (6.91b) を通して決まるとする．超重力理論の提唱者の一人による，初期の総合報告

P. van Nieuwenhuizen, 'Supergraviy', Phys. Rep. **68**(1981), pp.189-398.

には詳しい計算と初期の文献が多数網羅されている．本文の 1 階方式は

S. Deser and B. Zumino,'Consistent Supergravity', Phys. Lett. **62B**(1976), pp.335-337.

を四元数形式にかき換えただけである．

29) P. K. Townsend, 'Cosmological constant in supergravity', Phys. Rev. **D15** (1977), pp.2802-2804.

30) S. Deser and B. Zumino, 'Broken Supersymmetry and Supergravity', Phys. Rev. Lett. **38**(1977), pp.1433-1436.

宇宙定数がゼロでないと，Rarita-Schwinger 場は Minkowski 空間ではなく，一般に de Sitter 空間で量子化されるべきで，すると，質量をもった Rarita-Schwinger 場の運動方程式は質量のない場合のそれと数学的に同等になり，従って，自由度は依然として 2 であるというのが上記論文で局所超対称性の自発的破れを議論する動機の 1 つになっている．ここでは，宇宙定数がゼロでなくても，質量をもった Rarita-Schwinger 場を Minkowski 空間で量子化すれば，自由度が 4 になって，重力子の 2 と合わないので，局所超対称性の要請から，結局宇宙定数がゼロでなければならないという，ある意味で当然の結論に落ち着くことを証明する．

31) 宇宙項は重力子のゼロ質量に影響を与えないので，変分 δb_{μ} は変わらないと考えるのが自然である．実際，m を入れても $\boldsymbol{G}^{\mu}$ を含む項が全微分項になるべしとの要求から，(6.101)を得る．

第 7 章

四元数場のゲージ理論

これまでの 3 つの章において，Lorentz 変換やスピノルの記述など，素粒子の外部対称性に関して，四元数が果たす役割を論じてきた．その際，非コンパクトな Lorentz 群を 2 次の四元数スピノル群 $Spin(2,\mathbb{H})$ で記述することにより，自然な方法で複素四元数に導かれた．一方，4 つの成分を持つ (実) 四元数はコンパクト群で記述される素粒子の内部対称性に関しても，何らかの役割を果たしている可能性がある．この章と次章でその可能性を議論する．ただ，四元数を用いた素粒子モデルの構成法はそれ自身長い道のりを要し，そこに力点をおく関係上，議論は自ずから定性的となる．

素粒子の標準模型の確立 (1978) 以来，ゲージ原理，対称性の自発的破れおよび繰り込み可能性の考えが場の量子論のキーワードになった．また，物質粒子の世代構造という極めて特異でしかし整然とした素粒子の存在パターンが実験的に明らかにされている．この章では，フェルミオンや，ゲージ対称性の自発的破れの引き金になる Higgs 場が，四元数体上で定義されると仮定して得られるゲージ理論を定式化する．従って，ゲージ場も四元数体上で定義される (この章で言う四元数場とはこれら四元数体上で定義される局所場のことである)．四元数場のゲージ理論はゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ を持つことがわかる．このゲージ群は Glashow-Weinberg-Salam の電弱統一理論の一般化の 1 つ，左右対称な電弱理論で仮定されるものと一致する (ただし，物質場や Higgs 場などの四元数場は，$U(1)$ 電荷の任意性を除いて，5 つの既約表現に限られるという違いがある)．そこで，左右対称な電弱理論におけるゲージ対称性の自発的破れとニュートリノ質量の問題について，簡単に触れる．

7.1　四元数場に対する変換群と共変微分

第 1 章で述べたように，Hurwitz の定理で許される 4 つの組成代数のうち，体をなすのは**実数体** $\mathbb{R}$，**複数数体** $\mathbb{C}$，**四元数体** $\mathbb{H}$ に限られる[1)]．代数学のこの美しい定理は，場の理論においてスピン 1/2 の物質場を記述する 4 成分スピノル場を，体 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上だけでなく，体 $\mathbb{H}$ 上においても定義するという，自然な動機を与える．今，体 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 上の 4 成分スピノル場を

$$K = \mathbb{R} \cdots\cdots \text{Majorana 場} \qquad \chi \tag{7.1a}$$

$$K = \mathbb{C} \cdots\cdots \text{Dirac 場} \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_1 + i\chi_2) \tag{7.1b}$$

$$K = \mathbb{H} \cdots\cdots \text{四元数 Dirac 場} \qquad \psi = e_0\chi_0 + e_i\chi_i, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7.1c}$$

とかく．ここで，i は虚数単位，$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ は Hamilton の四元数の基底，すべての χ はスピノル添字 $\alpha = 1, 2, 3, 4$ を持つ，実数の Majorana スピノルで，Grassmann 変数と仮定する[*2)]．それ故，実数で数えた場合の自由度は，$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき，それぞれ 4，8，16 である．また，Dirac 行列には，実行列 (Majorana 表示) と複素行列 (他の表示) が可能である．これが $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 上で Dirac 場を定義できることを保証する．電気的に中性なスピン 1/2 の粒子 (ニュートリノ) は $K = \mathbb{R}$ 上の Majorana 場で記述できる可能性がある．複素数体上の Dirac 場 (7.1b) が 2 つの Majorana 場で書けることは既に (3.63) で述べた．Dirac 場 ψ は位相の自由度を持ち，Dirac ラグランジアン (3.32) を不変に保つ変換群が $U(1)$ であることから，ラグランジアンの中の偏微分 ∂_μ を共変微分におき換えて，可換な $U(1)$ ゲージ理論 (量子電磁力学，QED) に導く．一方，四元数 Dirac 場 (7.1c) (同じ記号 ψ を使うが混乱はあるまい) は 4 つの Majorana 場から成り，それらが Dirac 場の 2 重項を構成するので，非可換ゲージ理論に導くことがわかる．これは，場の量子論に概念的革命をもたらし，素粒子の標準模型に導いた，非可換群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づく Glashow-Weinberg-Salam (GWS)[3)]の電弱統一理論におけるクォーク・レプトンの多重項の構成法を四元数の言葉を用いて言い換えたに過ぎないが，非可換ゲージ理論としては次の点で異なる．

- ゲージ群は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ となる．その結果，弱い相互作用に

おける偶奇性の破れを，ゲージ対称性の自発的破れの結果とみなす，左右対称な電弱理論[4]が四元数場のゲージ理論として再解釈される．

- 四元数場は，$U(1)$ 電荷の任意性を除いて，ゲージ群の 5 つの表現に属する．それに対して，左右対称な電弱理論は任意のユニタリ既約表現を許す．
- クォーク・レプトンの世代構造という実験事実を，複素 Dirac 場の 2 重項または 1 重項の《繰り返し》で表現する代わりに，四元数 Dirac 場の《繰り返し》で表現する．そのため，すべての世代において，左巻きニュートリノとともに，右巻きニュートリノの存在を仮定することになり，左右対称な電弱理論で仮定されるフェルミオン・スペクトルを再現する．それ故，左右対称な電弱理論の範疇で議論されてきたニュートリノ質量の問題[5]を同じように取り上げることができる．

ただ，四元数場のゲージ理論はどのようなゲージ群が許されるかという初等的な議論から始めねばならない．同じ非可換ゲージ理論であっても，この一見迂遠な方法こそ，表現が限られることを主張する，四元数場のゲージ理論の特徴なのである[6]．この節では，四元数場の変換群の構造を見る．

1.4 節で見たように，四元数に関係する非可換群は $SO(3), SO(4)$ である．四元数 Dirac 場 (7.1c) の変換群を探すため，はじめに四元数スカラー場

$$\phi = e_0\phi_0 + e_i\phi_i, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7.2}$$

を考える．ここで，$\phi_{0,1,2,3}$ は 4 つのエルミートなスカラー場である．そのノルム $\bar{\phi}\phi$ を不変に保つ変換群は $SO(4)$ である．

$$\phi \to \phi' = U\phi\bar{V}, \quad U, V \in SL(1, \mathbb{H}) \tag{7.3a}$$

もし $\phi \in \mathbb{H}_0$ ならば，

$$\phi \to \phi' = U\phi\bar{U} \quad \text{または} \quad \phi' = V\phi\bar{V} \quad (\bar{\phi} = -\phi \text{ のとき}) \tag{7.3b}$$

は $SO(3)$ の変換性を示す．(7.3a), (7.3b) の変換をそれぞれ，$(U, V), (U, U), (V, V)$ とかき，その変換則に従う場をクラス $\boldsymbol{Q}_i, i = (U, V), (U, U), (V, V)$ の場と呼ぶことにする．これらの場は，$SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ の既約表現 $(2, 2), (3, 1), (1, 3)$ に属する．明らかに，変換 $i = (U, 1), (V, 1)$ に従う場も考えられる．それらは後の便宜上，クラス $\boldsymbol{Q}_L \equiv \boldsymbol{Q}_{(U,1)}, \boldsymbol{Q}_R \equiv \boldsymbol{Q}_{(V,1)}$ に属すと呼ぶことにする．

$$\phi_L \to \phi'_L = U\phi_L, \quad \phi_L \in \boldsymbol{Q}_L \tag{7.3c}$$

$$\phi_R \to \phi'_R = V\phi_R, \quad \phi_R \in \boldsymbol{Q}_R \tag{7.3d}$$

(7.3c,d) の変換はそれぞれ，$\bar{\phi}_L\phi_L, \bar{\phi}_R\phi_R$ を不変に保つ．これらの不変量は，一般化された変換

$$\phi_L \to \phi'_L = U\phi_L e^{-a\alpha e_3}, \quad \phi_L \in \boldsymbol{Q}_L \tag{7.4a}$$

$$\phi_R \to \phi'_R = V\phi_R e^{-a\alpha e_3}, \quad \phi_R \in \boldsymbol{Q}_R \tag{7.4b}$$

のもとでも不変に留まる．ただし，α は (7.4a,b) 共通に現れる (とした) 変換パラメータであり，a は場に固有の (実) 数値として選ぶ．一般には $\phi_{L,R}$ で a の値は異なってもいいが，以下では等しいと仮定する．今後，クラス $\boldsymbol{Q}_{L,R}$ に属する場というときは，変換 (7.4) に従う場をいう．

次に，U, V, α を時空座標に依存する関数とみなして，各変換則に従う場に対する共変微分の定義に移る．そうすれば，ラグランジアンの中の偏微分 ∂_μ を共変微分におき換えることにより，ゲージ不変なラグランジアンが構成できる (ゲージ理論の微分形式)．まず，(7.3a) に対する共変微分は

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi - \phi B_\mu \tag{7.5a}$$

$$A_\mu = e_0 A_\mu^0 + e_i A_\mu^i \equiv e_0 A_\mu^0 + \boldsymbol{A}_\mu, \quad \boldsymbol{A}_\mu \equiv e_i A_\mu^i \tag{7.5b}$$

$$B_\mu = e_0 B_\mu^0 + e_i B_\mu^i \equiv e_0 B_\mu^0 + \boldsymbol{B}_\mu, \quad \boldsymbol{B}_\mu \equiv e_i B_\mu^i \tag{7.5c}$$

$$A'_\mu = UA_\mu\bar{U} + U\partial_\mu\bar{U} \tag{7.5d}$$

$$B'_\mu = VB_\mu\bar{V} + V\partial_\mu\bar{V} \tag{7.5e}$$

で与えられる．(7.5d,e) は条件 $U\bar{U} = V\bar{V} = 1$ を使うと，

$$\boldsymbol{A}'_\mu = U\boldsymbol{A}_\mu\bar{U} + U\partial_\mu\bar{U}, \quad A'^{\,0}_\mu = A^0_\mu \tag{7.5f}$$

$$\boldsymbol{B}'_\mu = V\boldsymbol{B}_\mu\bar{V} + V\partial_\mu\bar{V}, \quad B'^{\,0}_\mu = B^0_\mu \tag{7.5g}$$

となる．その上，四元数ゲージ場の第 0 成分は互いに等しくなければならない．

$$A^0_\mu = B^0_\mu \tag{7.5h}$$

実際，(7.3a) の変換群をゲージ対称群にすると，理論に現れるゲージ場は 6 つである．$A^0_\mu = B^0_\mu$ とすれば，それらは共変微分 (7.5a) には寄与しないから，共

変微分の定義に現れるゲージ場は確かに 6 つになっている．けれども，この段階で，$A^0_\mu = B^0_\mu$ をゼロとする (従って，非ゲージ場とする) 理由は見つからない．(7.3a) の変換群は $SO(4)$ であるが，ゲージ場は 6+1 個生まれる．余分のゲージ場は可換ゲージ場で，四元数場 ϕ は対応する電荷がゼロだから，ϕ との結合は存在しないとすれば，辻褄が合う．このようにして，四元数場のゲージ理論は，変換群が $SO(4)$ であっても，この段階では理論に現れない余分の可換ゲージ場 1 つの存在を要求していると解釈できる．

同様に変換 (7.3b) に属する四元数場に対する共変微分は

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi], \quad \phi \in \boldsymbol{Q}_{(U,U)} \tag{7.6a}$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [B_\mu, \phi], \quad \phi \in \boldsymbol{Q}_{(V,V)} \tag{7.6b}$$

で与えられる．ここでも，四元数ゲージ場の第 0 成分は寄与しない．則ち，四元数場 $\phi \in \boldsymbol{Q}_i$, $i = (U,V),(U,U),(V,V)$ に対するゲージ理論はゲージ群 $SO(4) \times U(1)$ を持つが，これらの ϕ はすべて $U(1)$ 電荷がゼロであるので，$U(1)$ ゲージ場は相互作用しない．

しかしながら，$\boldsymbol{Q}_{L,R}$ に属する場 (ϕ_L, ϕ_R) に対する共変微分は

$$D^{(L)}_\mu \phi_L = (\partial_\mu + \boldsymbol{A}_\mu)\phi_L + aC_\mu \phi_L e_3 \tag{7.6c}$$

$$D^{(R)}_\mu \phi_R = (\partial_\mu + \boldsymbol{B}_\mu)\phi_R + aC_\mu \phi_R e_3 \tag{7.6d}$$

で与えられ，$A^0_\mu = B^0_\mu$ は顔を出さない代わりに，ゼロでない $U(1)$ 電荷をもつ場と結合する可換ゲージ場 C_μ が新しく必要になる．その変換則は

$$C'_\mu = C_\mu + \partial_\mu \alpha \tag{7.6e}$$

で与えられる．ところが，このゲージ場を使って，逆に $A^0_\mu = B^0_\mu$ を次のように定義できる．その結果，拘束条件 $A^0_\mu = B^0_\mu$ のため，ゲージ・パラメータ $\alpha = \alpha(x)$ は $\boldsymbol{Q}_{L,R}$ に共通に現れる必要がある．

$\phi_{L,R}$ に対して 5.4 節で導入した射影演算子 $E_\pm = (1/2)(e_0 \pm ie_3)$ を用いて分解 (虚数単位 i は四元数と可換とする)

$$\phi_{L,R} = \phi_{L,R}E_+ + \phi_{L,R}E_- \tag{7.7}$$

を考える．このとき，(7.6c,d) はこの分解の各成分に対して，次のようにかき直

せる．

$$D_\mu^{(L)}(\phi_L E_\pm) = (\partial_\mu + A_\mu^{(\pm a)})(\phi_L E_\pm) \tag{7.8a}$$

$$D_\mu^{(R)}(\phi_R E_\pm) = (\partial_\mu + B_\mu^{(\pm a)})(\phi_R E_\pm) \tag{7.8b}$$

なぜなら，(7.6c,d) の右から $E_\pm$ をかけると，$e_3 E_\pm = \mp i E_\pm$ に注意して，$aC_\mu \phi_{L,R} e_3 E_\pm = \mp i a C_\mu \phi_{L,R} E_\pm$ となるから，(7.5b,c) で $A_\mu^0 = B_\mu^0 = -iC_\mu$ とおくこと

$$A_\mu = -ie_0 C_\mu + e_i A_\mu^i, \quad B_\mu = -ie_0 C_\mu + e_i B_\mu^i \tag{7.8c}$$

が示唆され，さらに変換則 $\phi_{L,R}E_\pm \to (\phi_{L,R}e^{-a\alpha e_3})E_\pm = \phi_{L,R}(e^{-a\alpha e_3}E_\pm) = e^{\pm ia\alpha}(\phi_{L,R}E_\pm)$ に注意すると，(7.8a,b) に現れる $A_\mu^{(a)}$ は A_μ において，$A_\mu^0 \to aA_\mu^0$ としたものであり，同様に $B_\mu^{(a)}$ は B_μ において，$B_\mu^0 \to aB_\mu^0$ としたもので与えられるから．$\phi_{L,R}E_\pm$ がそれ自身で閉じた変換則に従う四元数場となることは後で見るが，その結果として，(反エルミートな) 四元数ゲージ場 (7.8c) が定義されるわけである．ただし，その第 0 成分は純虚数場 (反エルミート場) で，空間成分とゲージ変換で混ざらない．

$$A'_\mu = UA_\mu \bar{U} + U\partial_\mu \bar{U} - ie_0 \partial_\mu \alpha \tag{7.8d}$$

$$B'_\mu = VB_\mu \bar{V} + V\partial_\mu \bar{V} - ie_0 \partial_\mu \alpha \tag{7.8e}$$

従って，ゲージ変換という観点から言うと，四元数ゲージ場という概念はある意味で形式論的である．しかしながら，物質場が四元数場であることから，ゲージ場も (第 0 成分を持つ反エルミートな) 四元数場であるという仮定 (7.8c) は自然で，この形式論を採用することにより，Yang-Mills のラグランジアンに対してある離散的対称性を要請することができて，自明でない物理的結果をもたらす．

分解 (7.7) は 4 つのエルミート場 $\phi_{0,1,2,3}$ を同値な $SU(2)$ 2 重項 2 組に組み替えている．実際，(7.7) は

$$\phi_{L,R} = \phi_{L,R}E_+ + \phi_{L,R}E_- \equiv \varPhi_{L,R} + \varPhi^*_{L,R} \tag{7.9a}$$

$$\varPhi = \phi E_+ = \sqrt{2}(v_1\phi^1 + v_2\phi^2) \tag{7.9b}$$

$$\varPhi^* = \phi E_- = \sqrt{2}(v^1\phi^{1*} + v^2\phi^{2*}) \tag{7.9c}$$

とかける．ここで，(7.9b,c) の $\varPhi$ には添字 L, R を省略し，四元数のスプリッ

ト基底の定義 (4.65) を使った[7)]．組み替えられた複素場は

$$\phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_0 - i\phi_3), \quad \phi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\phi_1 + \phi_2) \tag{7.9d}$$

で与えられる．関係式 $E_\pm e_3 = \mp i E_\pm$ を使えば，変換則 (7.4) は次のようになることがわかる．

$$\phi_L \to \phi_L' = \varPhi_L' + \varPhi_L^{*\prime} = U\phi_L e^{-a\alpha e_3} = e^{ia\alpha}U\varPhi_L + e^{-ia\alpha}U\varPhi_L^* \tag{7.10a}$$

$$\phi_R \to \phi_R' = \varPhi_R' + \varPhi_R^{*\prime} = V\phi_R e^{-a\alpha e_3} = e^{ia\alpha}V\varPhi_R + e^{-ia\alpha}V\varPhi_R^* \tag{7.10b}$$

すなわち，上に述べたように，分解 (7.9a) の各成分は ($a \neq 0$ である限り) 別々に変換する．$\varPhi$ を構成する (7.9d) の場 $(\phi^1, \phi^2)^T$ は $SU(2)$ の 2 重項をなす．それを見るには，四元数の Pauli 表現 (4.60a)

$$e_0 \to \tau_0, \quad \boldsymbol{e} \to -i\boldsymbol{\tau} \tag{7.11a}$$

をとる (τ_0 は 2 次の単位行列，$\boldsymbol{\tau}$ は Pauli 行列)．するとスプリット基底は

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.11b}$$

と表現されるので，(7.9) の分解は，

$$\phi = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \phi^1 & 0 \\ \phi^2 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\phi^{2*} \\ 0 & \phi^{1*} \end{pmatrix} \tag{7.11c}$$

となる．(7.11a) を用いて，U を $SU(2)$ の行列で表せば，普通の 2 重項に対する記号が使えて，

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_0 - i\phi_3 \\ -i\phi_1 + \phi_2 \end{pmatrix} \tag{7.11d}$$

$$\varpi\Phi^* = \begin{pmatrix} -\phi^{2*} \\ \phi^{1*} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\phi_1 - \phi_2 \\ \phi_0 + i\phi_3 \end{pmatrix} \tag{7.11e}$$

が $SU(2)$ の 2 重項に属することがわかる ($\phi = \sqrt{2}(\Phi, \varpi\Phi^*)$)．ただし，$\varpi$

は (2.21b) で定義された行列である．従って，$\boldsymbol{Q}_L$ に属する場は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の表現 $(2,1,a)$，$\boldsymbol{Q}_R$ に属する場は表現 $(1,2,a)$ に属する．この記号を使えば，$\boldsymbol{Q}_i, i = (U,V),(U,U),(V,V)$ に属する場は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の表現 $(2,2,0),(3,1,0),(1,3,0)$ に属する．

次に，クラス $\boldsymbol{Q}_{(U,U)}, \boldsymbol{Q}_{(V,V)}$ に属する四元数複素スカラー場 Δ_L, Δ_R を考える．これらは，応用上の必要から，ゼロでない $U(1)$ 電荷を持つとする．

$$\Delta = \Delta_i e_i, \quad (i = 1,2,3), \quad \Delta_i \in \mathbb{C} \tag{7.12a}$$

$$\Delta_L \to \Delta'_L = e^{2ib\alpha} U \Delta_L \bar{U} \tag{7.12b}$$

$$\Delta_R \to \Delta'_R = e^{2ib\alpha} V \Delta_R \bar{V} \tag{7.12c}$$

(7.12b,c) では同じ b の値を仮定した．Δ_L は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の表現 $(3,1,2b)$ に属し，Δ_R は表現 $(1,3,2b)$ に属す ($b = 0$ とおいたものが表現 (3,1,0),(1,3,0) に相当する既出 (7.3b) の場合)．(7.11a) を用いると，(7.12a) は次の行列で表現される．

$$\Delta = \begin{pmatrix} -i\Delta_3 & -\Delta_2 - i\Delta_1 \\ +\Delta_2 - i\Delta_1 & i\Delta_3 \end{pmatrix} \tag{7.12d}$$

なお，(7.6a,b) は $\Delta_{L,R}$ に対しては，次のように一般化されねばならない．

$$D_\mu \Delta_L = \partial_\mu \Delta_L + A_\mu^{(b)} \Delta_L - \Delta_L A_\mu^{(b)\,*}, \quad \Delta_L \in \boldsymbol{Q}_{(U,U)} \tag{7.13a}$$

$$D_\mu \Delta_R = \partial_\mu \Delta_R + B_\mu^{(b)} \Delta_R - \Delta_R B_\mu^{(b)\,*}, \quad \Delta_R \in \boldsymbol{Q}_{(V,V)} \tag{7.13b}$$

ここで，A_μ^* は A_μ の複素共役で，(7.8c) で i の符号を変えたもので与えられる．B_μ^* も同様．

結局，四元数場は，$U(1)$ 電荷の任意性を除いて，$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の 5 つの既約表現，$(2,2,0),(2,1,a),(1,2,a),(3,1,2b),(1,3,2b)$ に分類されることがわかった．

次に，(7.5a) からよく知られた方法で定義される場の強さ

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = f_{\mu\nu}\phi - \phi g_{\mu\nu} \tag{7.14a}$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \to f'_{\mu\nu} = U f_{\mu\nu} \bar{U} \tag{7.14b}$$

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu] \to g'_{\mu\nu} = V g_{\mu\nu} \bar{V} \tag{7.14c}$$

から (第 0 成分は (7.14a) に効かないにもかかわらず)，Yang-Mills のラグランジアンを求めると，

$$\mathcal{L}_{Y\text{-}M} = -\frac{1}{g_L^2}\mathrm{Re}\,[\bar{f}_{\mu\nu}f^{\mu\nu}] - \frac{1}{g_R^2}\mathrm{Re}\,[\bar{g}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}] \tag{7.15}$$

になる ($f \to \bar{f}$ は第 0 成分の複素共役も含む[8])．ここで，$g_{L,R}$ は結合定数である．このように，四元数場のゲージ理論では，ゲージ場も四元数上で定義されるとするので，Yang-Mills のラグランジアン (7.15) は 2 つの独立な結合定数しか持たない．これは，可換なゲージ場 C_μ が四元数ゲージ場 A_μ, B_μ の第 0 成分に共通に現れていることを利用して，入れ替え $f_{\mu\nu} \leftrightarrow g_{\mu\nu}$ と同時に入れ替え $g_L \leftrightarrow g_R$ をしても (7.15) は変わらないという要請をおくことができるからである．

ところが，四元数ゲージ場の第 0 成分とベクトル成分 $\boldsymbol{A}_\mu \equiv e_i A^i_\mu, \boldsymbol{B}_\mu \equiv e_i B^i_\mu$ はゲージ変換 (7.8d,e) では混ざらない，すなわち，ゲージ変換 (7.8d,e) は

$$\boldsymbol{A}'_\mu = U\boldsymbol{A}_\mu\bar{U} + U\partial_\mu\bar{U} \tag{7.16a}$$

$$\boldsymbol{B}'_\mu = V\boldsymbol{B}_\mu\bar{V} + V\partial_\mu\bar{V} \tag{7.16b}$$

および (7.6e) を意味するので，別々の結合定数をもつとするのが通常の処方箋からの要求である．この場合，Yang-Mills のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{Y\text{-}M} = -\frac{1}{g_L^2}\bar{\boldsymbol{f}}_{\mu\nu}\boldsymbol{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{g_R^2}\bar{\boldsymbol{g}}_{\mu\nu}\boldsymbol{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{g'^2}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)^2 \tag{7.16c}$$

とかける．ただし，$\boldsymbol{f}_{\mu\nu} = e_i f^i_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + [\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu], \boldsymbol{g}_{\mu\nu} = e_i g^i_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{B}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{B}_\mu + [\boldsymbol{B}_\mu, \boldsymbol{B}_\nu]$ とおいた．これを (7.15) と比較すれば，

$$\frac{1}{g'^2} = \frac{1}{g_L^2} + \frac{1}{g_R^2} \tag{7.16d}$$

が得られる．

7.2 四元数と左右対称電弱理論

四元数場のゲージ理論はゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ を持つことがわかった．この節では，これを左右対称電弱理論に応用する．ただし，モデルの基本的構造にのみ焦点を合わせ，仔細は省く．つまり，この節と次節は決して左右

対称電弱理論の解説ではない．あくまでも，四元数場のゲージ理論が左右対称模型に如何にフィットするかを示すことに主眼をおく．左右対称電弱理論そのものについて興味を持たれた読者のために章末に初期の論文から，最近の総合報告までを代表的なものだけ引用した．[4)]

まず，クォーク・レプトンの世代構造は四元数 Dirac 場の《繰り返し》で記述できると仮定する．より正確に言えば，四元数 Dirac 場のカイラル成分 (3.42)

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \tag{7.17a}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \tag{7.17b}$$

が $\boldsymbol{Q}_{L,R}$ に属すると仮定する．この仮定により，四元数 Dirac 場 (7.1c) は，各カイラル成分に対して，分解

$$\psi = \psi E_+ + \psi E_- \equiv \varPsi + \varPsi^* \to \psi_{L,R} = \varPsi_{L,R} + \varPsi^*_{L,R} \tag{7.18}$$

がなされていることになる．この分解は，$\phi_{L,R}$ に対する分解 (7.9)，(7.11d,e) と同じであるから，次の結果を与える．則ち，四元数 Dirac 場 (7.1c) に現れる 4 つの Majorana 場から，複素 Dirac 場の 2 重項が定義されて，

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_0 - i\chi_3 \\ -i\chi_1 + \chi_2 \end{pmatrix}_L \tag{7.19a}$$

は $G = SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の表現 $(2,1,a)$ に属し，

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_0 - i\chi_3 \\ -i\chi_1 + \chi_2 \end{pmatrix}_R \tag{7.19b}$$

は表現 $(1,2,a)$ に属する．ここで，四元数のスプリット基底 (4.65) を用いず，2 重項に対する通常の表記法を採用した．(7.18) の記号 $\varPsi$ と 2 重項に対する記号 Ψ はよく似ているが，前者は四元数場であるのに対し，後者はそれを 2 重項表示したものである．

さて，上の仮定に基づいて，次の同定をすれば，左右対称な電弱理論におけるフェルミオン・セクターのスペクトル構造と同じになる．

$$\begin{array}{lccccc} & \text{第1世代} & \text{第2世代} & \text{第3世代} & Q & B-L \\ (7.19\text{a})\text{の}\ \Psi_L = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L & \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (a=-1) \\ & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L & \cdots \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} & (a=1/3) \end{array} \tag{7.19c}$$

$$\begin{array}{lccccc} (7.19\text{b})\text{の}\ \Psi_R = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_R, & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_R, & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_R & \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (a=-1) \\ & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R, & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_R, & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_R & \cdots \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} & (a=1/3) \end{array} \tag{7.19d}$$

ここで，素粒子のネーミングについて説明する．基本粒子であるスピン 1/2 の物質粒子はクォークとレプトンに分類される．クォークは今まで自由粒子として観測にかかっていない．しかし，ハドロンと呼ばれる強い相互作用に関与する粒子の構成要素として，その存在を疑う人は殆どいない．そのクォークは $q = u, d, s, c, b, t$ とかいて，順にアップ，ダウン，ストレンジ，チャーム，ボトム，トップクォークと呼び，レプトンは $l = \nu_{\rm e}, \nu_\mu, \nu_\tau$, e,$\mu$,$\tau$ とかいて電子型，ミュー粒子型，タウ粒子型ニュートリノ (中性微子)，電子，ミュー粒子，タウ粒子という。それらが 3 世代のカイラルフェルミオンをなしていることが実験からわかっている[9)]．なお，(7.19c,d) はゲージ基底 (フレーバー基底) を表しており，質量の固有状態ではない．だから，ニュートリノも他のフェルミオンと同様 Dirac 粒子として記述されているが，次節で，ニュートリノの質量固有状態は Majorana 粒子である可能性が高いことを議論する．とにかく，ニュートリノは左巻きだけでなく右巻きのものが同時に登場する点が，左右対称な電弱理論の特徴である．もっと一般的に，左右対称な電弱理論においては，L-場と R-場は必ず対になって現れる．記号 L, R はフェルミオンの場合にはカイラリティーを指定するが，ゲージ場や Higgs 場に対しては，後に定義される，一般化された P 変換で結ばれるものである．左右対称模型の左右対称とは，この L-R 対称性を意味する．従って，左右対称電弱理論はラグランジアン・レベルで空間反転不変

であり，現在のエネルギーで見られるパリティの破れは，ゲージ対称性の自発的破れによるとする．

(7.19c) 式の一番上の行にある記号 Q は素電荷 e を単位にした各素粒子の電荷，$a = B - L$ は左右対称模型の $U(1)$ 電荷を表す．電荷 Q は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ に現れる対角化可能な演算子 $I_{3\,L}, I_{3\,R}, B - L$ と

$$Q = I_{3\,L} + I_{3\,R} + \frac{1}{2}(B - L) \tag{7.20}$$

の関係にある．ここで，B はバリオン数，L はレプトン数を表す[10)]．標準模型では，非摂動効果により，各々は保存しないが，$B - L$ は保存し，各世代毎に，$U(1)_{B-L}$ には量子異常が存在しないことがわかっている．GWS 理論における $U(1)_Y$ 電荷 (弱超電荷) はフェルミオンの種類だけでなく，カイラリティーにも依存するのに対し，左右対称模型の $U(1)$ を $U(1)_{B-L}$ に同定すると，$U(1)$ 電荷がフェルミオンのカイラリティーに依存しなくなり，クォーク・レプトン対称性を反映して，その物理的意味がはっきりする[11)]．この電荷演算子によって生成される群 $U(1)_{em}$ だけが厳密なゲージ対称性として残るように，ゲージ対称性の自発的破れ $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \to U(1)_{em}$ が起こるものと仮定される．(7.20) は各多重項に対しての関係式を与える．例えば，(7.19c,d) について言うと，(7.20) 各項は表現 $(2, 1, a), (1, 2, a)$ に対して，固有値 $(\pm 1/2, 0, a), (0, \pm 1/2, a)$ を持ち ($+$ は上の成分, $-$ は下の成分)，$B - L$ の固有値は (7.19c,d) で示した値になる．

次に，フェルミオンのゲージ不変なラグランジアンを求めよう．そのため，$\phi_{L,R} \to \psi_{L,R}$ とした (7.6c,d) を

$$D_\mu^{(L)} \psi_L \equiv (\partial_\mu + \boldsymbol{A}_\mu)\psi_L + aC_\mu \psi_L e_3 \tag{7.21a}$$

$$D_\mu^{(R)} \psi_R \equiv (\partial_\mu + \boldsymbol{B}_\mu)\psi_R + aC_\mu \psi_R e_3 \tag{7.21b}$$

とおいて，簡単のため，(3.32a) の形のラグランジアンを採用すれば，フェルミオンのゲージ不変なラグランジアンは世代についての和を含めた，

$$L(\psi) = -\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu^{(L)} \psi_L E_+] + (L \leftrightarrow R) \tag{7.22a}$$

で与えられる．ただし，$\bar{\psi}$ のバーは四元数共役の他に，4 成分スピノルに対する Dirac 共役も含む．従って，(7.1c) で定義された四元数 Dirac 場に対する $\bar{\psi}$ は

$$\bar{\psi} = e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i \tag{7.22b}$$

となる．ここで，$\bar{\chi}_\mu = \chi_\mu^\dagger i\gamma^0$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は通常の Dirac 共役である (各 χ_μ が 4 成分スピノルであることを思い出そう)．$SU(2)$ の 2 重項に対する普通の記号 (7.19) を使えば，(7.22a) は左右対称模型でよく知られた次の形をとる．

$$L(\psi) = -\overline{\Psi}_L\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu^{(L)}\Psi_L - \overline{\Psi}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu^{(R)}\Psi_R \tag{7.22c}$$

この証明の際，公式 (4.68) を利用した．ここで採用している記号では，共変微分 $\mathcal{D}_\mu^{(L,R)}$ は

$$\mathcal{D}_\mu^{(L)} = \partial_\mu - \frac{ig'}{2}a\tau_0 C_\mu - \frac{ig_L}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_{L\,\mu} \tag{7.22d}$$

$$\mathcal{D}_\mu^{(R)} = \partial_\mu - \frac{ig'}{2}a\tau_0 C_\mu - \frac{ig_R}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_{R\,\mu} \tag{7.22e}$$

で与えられる．これらは，(7.8a,b,c) で定義された共変微分において，$\boldsymbol{W}_L \equiv (A^1, A^2, A^3), \boldsymbol{W}_R \equiv (B^1, B^2, B^3)$ とおき，場のスケール変換 $C_\mu \to (g'/2)C_\mu, \boldsymbol{W}_{L,R} \to (g_{L,R}/2)\boldsymbol{W}_{L,R}$ を行ってえられる．それ故，(7.8d,e) のゲージ変換は新しく定義された場に対し

$$\boldsymbol{W}_{L\mu} \to \boldsymbol{W}'_{L\mu} = U\boldsymbol{W}_{L\mu}U^{-1} + \frac{2}{g_L}U\partial_\mu U^{-1} \tag{7.22f}$$

$$\boldsymbol{W}_{R\mu} \to \boldsymbol{W}'_{R\mu} = V\boldsymbol{W}_{R\mu}V^{-1} + \frac{2}{g_R}V\partial_\mu V^{-1} \tag{7.22g}$$

$$C_\mu \to C'_\mu = C_\mu + \frac{2}{g'}\partial_\mu\alpha \tag{7.22h}$$

となる．ただし，ここの U, V は $U, V \in SL(1, \mathbb{H})$ を (7.11a) によって $SU(2)$ 行列表現したもの．

このスケール変換によって，Yang-Mills のラグランジアン (7.15) の (結合定数)$^{-2} \to 1/4$ になる．

また，ゲージ場の強さは，$\boldsymbol{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu + (g_L/2)[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu], \boldsymbol{g}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{B}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{B}_\mu + (g_R/2)\ [\boldsymbol{B}_\mu, \boldsymbol{B}_\nu]$ の様になる．これらの式の証明は以下に示す．

(7.22a) が (7.22c,d,e) に等しいことの証明

添字 L を持つ項のみ証明すればよい．共変微分 $D_\mu^{(L)}$ は (7.8a) で定義されており，$\psi_L E_+ = \Psi_L$ は (7.18) の分解に現れている．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
&(7.22\text{a})\ \text{の添字}\ L\ \text{を含む項}\\
&= -\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu^{(L)}\psi_L E_+] = -\mathrm{Re}\,[\overline{(\psi_L E_-)}\gamma^\mu D_\mu^{(L)}\psi_L E_+]\\
&= -\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi_L^*}\gamma^\mu D_\mu^{(L)}\Psi_L]\\
&= -\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi_L^*}\gamma^\mu(\partial_\mu - iaC_\mu)\Psi_L] - \mathrm{Re}\,[\overline{\Psi_L^*}\gamma^\mu \boldsymbol{A}_\mu\Psi_L], \qquad \boldsymbol{A}_\mu = e_i A_\mu^i
\end{aligned}
$$

ここで，分解 (7.18) から $\psi_L E_- = \Psi_L^*$ であることを使った．また，(7.8a) により，$D_\mu^{(L)}\Psi_L = (\partial_\mu + A_\mu^{(+a)})\Psi_L$ である．四元数スピノル場はスプリット基底 (4.65) を用いて $\overline{\Psi_L^*} = \sqrt{2}(\overline{v^1}\,\overline{\psi_L^{1*}} + \overline{v^2}\,\overline{\psi_L^{2*}}) = \sqrt{2}(v_1^\dagger\overline{\psi_L^{1*}} + v_2^\dagger\overline{\psi_L^{2*}})$, $\Psi_L = \sqrt{2}(v_1\psi_L^1 + v_2\psi_L^2)$ と表せる．ただし，成分場 $\psi_L^{1,2}$ は (7.19a) で与えられる Dirac スピノルである．その Dirac 共役は $\overline{\psi_L^{1*}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_0 + i\bar{\chi}_3)_L, \overline{\psi_L^{2*}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2)$，である ($\overline{\psi_L^1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_0 - i\bar{\chi}_3)_L, \overline{\psi_L^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-i\bar{\chi}_1 + \bar{\chi}_2)$，が Dirac 共役でないことに注意．この定義が (7.22b) と矛盾しないことは，$\bar{\psi} = e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i$ が $\bar{\psi} = \overline{\Psi} + \overline{\Psi^*} = \sqrt{2}(\overline{v_1}\,\overline{\psi^1} + \overline{v_2}\overline{\psi^2}) + \sqrt{2}(\overline{v^1}\,\overline{\psi^{1*}} + \overline{v^2}\,\overline{\psi^{2*}})$ に等しいことからわかる)．(7.19a) の 2 重項記号を使えば，上式は (4.68)に注意して，

$$
\begin{aligned}
&(7.22\text{a})\ \text{の添字}\ L\ \text{を含む項}\\
&= -\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - iaC_\mu)\Psi_L - 2\mathrm{Re}\,[(v_1^\dagger\overline{\psi_L^{1*}} + v_2^\dagger\overline{\psi_L^{2*}})\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu(v_1\psi_L^1 + v_2\psi_L^2)]
\end{aligned}
$$

となる．この第 2 項を変形するため，(4.67) から証明できる $\boldsymbol{e}v_\alpha = -iv_\beta(\boldsymbol{\tau})_{\beta\alpha}$ を利用する．再び (4.68) に注意して，上式は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&(7.22\text{a})\ \text{の添字}\ L\ \text{を含む項}\\
&= -\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - iaC_\mu)\Psi_L + i[\overline{\psi_L^{1*}}\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu\cdot(\boldsymbol{\tau})_{11}\psi_L^1 + \overline{\psi_L^{2*}}\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu\cdot(\boldsymbol{\tau})_{21}\psi_L^1\\
&\qquad\qquad + \overline{\psi_L^{1*}}\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu\cdot(\boldsymbol{\tau})_{12}\psi_L^2 + \overline{\psi_L^{2*}}\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu\cdot(\boldsymbol{\tau})_{22}\psi_L^2]\\
&= -\overline{\Psi}_L\gamma^\mu(\partial_\mu - iaC_\mu - i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu)\Psi_L \quad \text{ここの} \quad \boldsymbol{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)
\end{aligned}
$$

これに添字 R をもつ項を加え，本文で述べたようなゲージ場のスケール変換を行えば，(7.22c,d,e) を得る．この証明の際，四元数の Pauli 表現 (7.11a)を使っていないことに注意せよ．□

ここで，左右対称電弱模型の基本的仮定を持ち込む．すなわち，ラグランジアン (7.22c) は次のような一般化された P 変換のもとで不変であると仮定する．

$$
\begin{aligned}
\Psi_L(x) &\to \Psi'_L(x_P) = i\gamma^0\Psi_R(x)\\
\Psi_R(x) &\to \Psi'_R(x_P) = i\gamma^0\Psi_L(x)\\
\overline{\Psi}_L(x) &\to \overline{\Psi}'_L(x_P) = i\overline{\Psi}_R(x)\gamma^0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_R(x) &\to \overline{\Psi}'_R(x_P) = i\overline{\Psi}_L(x)\gamma^0 \\
\boldsymbol{A}_\mu(x) &\to \boldsymbol{A}'_\mu(x_P) = -\boldsymbol{B}^\mu(x) \\
\boldsymbol{B}_\mu(x) &\to \boldsymbol{B}'_\mu(x_P) = -\boldsymbol{A}^\mu(x) \\
C_\mu(x) &\to C'_\mu(x_P) = -C^\mu(x)
\end{aligned} \tag{7.23}$$

($\partial_\mu \to \partial_\mu^P$ に注意)．ラグランジアン・レベルにおけるこの不変性の要請から，フェルミオンに対する変換則 (7.4a,b) の両式には同じ定数 a が現れるべきこと，および

$$g_L = g_R \equiv g \tag{7.24a}$$

が導かれる．非可換ゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ のもとでの対称性，それに基づくフェルミオンの割り当て (7.19c,d), 電荷演算子の定義 (7.20)，フェルミオンのゲージ相互作用とゲージ場の変換則 (7.22c,d,e,f,g,h)，一般化された P 変換 (7.23)，一般化された P 不変性からの帰結 (7.24a)，および対称性の自発的破れ $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \to U(1)_{em}$ が左右対称電弱理論の基本仮定である．これらをスタートラインにして，左右対称電弱理論の本番が始まる．前節の結果に基づいた (7.22a) が (7.22c) に等しいことは，四元数場のゲージ理論が左右対称電弱理論に如何にフィットするかの説明である (これは四元数ゲージ場についての仮定には無関係である)．GWS 理論のもたらした概念的基礎に立つ，左右対称電弱理論のスタートラインに至るまでに，四元数の隠されている助走路が用意されているのではないかという可能性を述べたことになる．

ところで，(7.24a) の結果，(7.16d) は

$$g' = \frac{1}{\sqrt{2}}g \tag{7.24b}$$

となる．Mohapatra はかつてこの関係を左右対称電弱理論の力学的起源を複合模型に求めて導いたことがある[12)]．四元数ゲージ理論では，ゲージ場も四元数体上で定義されるべしという要請，すなわち，(7.23) 最後の 3 式を以下の 2 式

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &\to A'_\mu(x_P) = -B^\mu(x) \\
B_\mu(x) &\to B'_\mu(x_P) = -A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

におき換えた式から (7.16d), (7.24b) が自然に導かれる．

次に，左右対称電弱理論におけるゲージ対称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ の自発的破れについて定性的なシナリオだけ復習する．この対称性は (7.20) によって生成されるゲージ対称性 $U(1)_{em}$ にまで自発的に壊れなければならない．GWS 理論のゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ はただ 1 つのヒッグス 2 重項 ϕ のみで，

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow[\langle\phi\rangle = M_W]{} U(1)_{em} \tag{7.26}$$

という対称性の自発的破れが実現できる．(7.26) で $\langle\phi\rangle$ は Higgs 場 ϕ の真空期待値を表し，M_W は荷電ウィークボソンの質量で，実験値は $M_W = 80$ GeV である (Fermi 結合定数の大きさから $v = \sqrt{2}\,\langle\phi\rangle = 246$ GeV[13])．GWS 理論では $M_W^2 = (g^2/2)\langle\phi\rangle^2$ で与えられる (7.26) ではこれを単に $\langle\phi\rangle = M_W$ と記した)．それに対し，ゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ を持つ左右対称電弱理論では，目的に叶うように，より複雑な Higgs セクターを仮定する．普通仮定される Higgs 場は次のようなセットである (最小模型といわれることがある)．

$$\phi \sim (2,2,0) \qquad \langle\phi\rangle = e_0\mathsf{v}_0 + ie_3\mathsf{v}_3 \to \langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} \mathsf{v}_0 + \mathsf{v}_3 & 0 \\ 0 & \mathsf{v}_0 - \mathsf{v}_3 \end{pmatrix} \tag{7.27a}$$

$$\Delta_L \sim (3,1,2) \qquad \langle\Delta_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \mathsf{v}_L \to \langle\Delta_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathsf{v}_L & 0 \end{pmatrix} \tag{7.27b}$$

$$\Delta_R \sim (1,3,2) \qquad \langle\Delta_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \mathsf{v}_R \to \langle\Delta_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathsf{v}_R & 0 \end{pmatrix} \tag{7.27c}$$

ここで，ϕ は表現 $(2,2,0)$ に属する四元数複素スカラー場で，いわゆる，双 2 重項に対応する．その真空期待値は条件 $U\langle\phi\rangle\bar{V} = \langle\phi\rangle \to U = V = e^{-\alpha e_3}$ から (7.27a) のようになる[14]．Higgs 場 $\Delta_{L,R}$ の表現は (7.27b,c) の 2 列目に記した通り．$\Delta_{L,R}$ の $B - L = 2$ ととる理由は，レプトン数 $L = 1$ を持つ右巻きニュートリノとの (Majorana 型質量を与える) Yukawa 結合が $B - L$ を保存するようにするためである．そして，$U(1)_{B-L}$ ゲージ対称性が $\langle\Delta_R\rangle \neq 0$ によって自発的に破れるとき，$B - L$ も保存しなくなり，右巻きニュートリノが

莫大な質量を獲得して，シーソー機構により，観測されるニュートリノの微小な質量が説明されるとする (これについては次節で簡単な説明をする)．その真空期待値は四元数のスプリット基底の 1 つ v_2 の成分のみを持ちうる．これは，(7.12b,c) (で $b=1$ とおいたもの) によって，

$$\langle \Delta_R \rangle \to \langle \Delta'_R \rangle = e^{2i\alpha} V \langle \Delta_R \rangle \bar{V} = \langle \Delta_R \rangle \tag{7.28}$$

となるのは，乗積表 3, 4 (p.171) から，$-e_3 v_2 = -iv_2 = v_2 e_3$ が得られることに注意して，$V = e^{-\alpha e_3}$ の場合であることからわかる．もし，$\langle \Delta_L \rangle = \langle \phi \rangle = 0$ とおけば，ゲージ対称性は，$(U, V, e^{-\alpha e_3}) \to (U, e^{-\alpha e_3})$，$U \in SL(1, \mathbb{H})$，$\alpha \in \mathbb{R}$ に自発的に破れる．フェルミオンの質量を生み出すには，$\langle \phi \rangle \neq 0$ を仮定しなければならないが，真空期待値が (7.27a) で与えられるときは，既に述べたように，$U\langle \phi \rangle e^{+\alpha e_3} = \langle \phi \rangle \to U = e^{-\alpha e_3}$ となり，最終的に破れないで残るゲージ対称性は，$\{e^{-\alpha e_3}\}$ で張られる $U(1)_{em}$ となる．このとき，自動的に $\langle \Delta'_L \rangle = \langle \Delta_L \rangle$ となるので，Δ_L はゼロでない真空期待値を持つ必要はない．以上述べたことより，左右対称電弱理論におけるゲージ対称性の自発的破れは，

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \xrightarrow[\langle \Delta_R \rangle]{} SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow[\langle \phi \rangle]{} U(1)_{em} \tag{7.29}$$

というパターンを示す．ただし，$\langle \Delta_R \rangle$ は v_R のこと，$\langle \phi \rangle$ は $\mathsf{v}_{0,3}$ を表すものとする．簡単のため，これらの真空期待値はすべて実数と仮定する．

このように 2 段階の対称性の破れを想定するときには，理論的にそれが可能かどうか，可能だとしたら，実験事実との整合性が問題になる．実験とあうためには，$\mathsf{v}_R \gg \mathsf{v}_{0,3} \gg \mathsf{v}_L$ でなければならない．なぜなら，v_R は主に $V+A$ カレントと結合するウィークボソン $W_R^{\pm}$，Z_R に質量を与え[15]，$\mathsf{v}_{0,3}$ は主に $V-A$ カレントと結合するウィークボソン $W_L^{\pm}$，Z_L およびフェルミオンに質量を与え[16]，実験的には，ニュートリノの質量と混合の問題を除いて，GWS 理論が正しいことがわかっているから，W_R, Z_R の質量は，それらが仮に存在するとしても，観測されているウィークボソンの質量に比べ，遙かに大きいとせねばならないからである．実験的に見つかっている荷電ウィークボソンは，より小さな質量をもつ $W_L^{\pm}$ だけである (小さな混合を無視すれば，これは GSW 理論の $W^{\pm}$ ($M_W = 80$ Gev) に等しい．$W_R^{\pm}$ は仮想的な粒子である．2008 年の PDG[17]によると，$M_{W_R} > 715$ GeV が報告されている)．W とともに，GWS

理論で予言され，実験で発見された，電荷を変えない弱い相互作用を媒介する中性ウィークボソン Z^0 の質量は $M_Z = 91$ GeV である．左右対称な理論では有質量の中性ゲージボソンは 2 つ存在し，ここでは，それを $Z_{L,R}$ とかいた．Z^0 に対応するものを Z_L とする．Z_R は $W_R^{\pm}$ と同程度に重いとされる仮想的な粒子である (2008 年の PDG[17] によると，反応過程によって異なるが，$M_{Z_R} >$ 630 および 860 GeV が報告されている).

理論的には，Higgs 場 ϕ[18], $\Delta_{L,R}$ を含む，$L \leftrightarrow R$ 対称なポテンシャルの最も一般的な形はわかっており，その 1-ループ繰り込みも調べられている[19]．その際，(7.23) の一般化された P 変換は Higgs 場に対して

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &\to \phi'(x_P) = \phi^{\dagger}(x) \\
\Delta_L(x) &\to \Delta'_L(x_P) = \Delta_R(x) \\
\Delta_R(x) &\to \Delta'_R(x_P) = \Delta_L(x)
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

のように要請される．この変換のもとで不変な最も一般的なポテンシャルは 18 個の実数の任意パラメータを持ち，非対称解 $v_R \gg v_{1,2} \gg v_L$ が存在する．この非対称解がポテンシャルの最小値を与える条件も調べられている．この非対称解があるので，左右対称電弱理論は (7.29) のような対称性の自発的破れに従う．左右対称な電弱理論では，弱い相互作用における P 非保存は低エネルギー現象であって，自発的対称性の破れより高いエネルギーでは，P は保存されると考える．弱い相互作用における離散対称性の破れ[20]についてのこのような見方が，対称性の自発的破れはスピン 0 の場による普遍的なものとみなす立場からは自然であるという議論もされている[21]．

M_{W_R} は v_R に比例すること，M_{W_L} は本質的には $\mathsf{v}_{0,3}$ で決まることがわかっているから，この左右対称モデルでは，非対称解 $\mathsf{v}_R \gg \mathsf{v}_{0,3} \gg \mathsf{v}_L$ に対応して，

$$
M_{W_R} \gg M_{W_L}, \quad M_{Z_R} \gg M_{Z_L} \tag{7.31}
$$

が成り立っていると想定される．これが，(7.29) で示された 2 段階の対称性の破れに対応する．現象と密着した，定量的評価については，章末に引用する論文[4),19] を参照されたい．

破れないで残るゲージ対称性 $U(1)_{em}$ に付随するゲージ場 A^{γ} は W_R^3, W_L^3, C

の，$Z_{L,R}$ とは直交する線形結合で与えられ，ゼロ質量のままに留まる．その線形結合は，$v_L \ll v_{0,3} \ll v_R$ の近似で，Weinberg 角 θ_W と呼ばれる唯一のパラメータで与えられる．

$$A^{\gamma}_{\mu} = \sin\theta_W (W^3_{L\,\mu} + W^3_{R\,\mu}) + \sqrt{\cos(2\theta_W)}\, C_{\mu} \tag{7.32a}$$

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + 2g'^2} \leqq \frac{1}{2} \tag{7.32b}$$

関係式 (7.24b) を用いれば，

$$\sin^2\theta_W = \frac{1}{4} \tag{7.33}$$

となる．2008 年の PDG[17)] によるデータでは，GWS 理論の $\sin^2\theta_W = 0.23$ である．

現在では，(少なくとも 2 つの) ニュートリノの質量がゼロでないことは実験的にわかっている．そのため，何らかの意味で，観測されている左巻きニュートリノ ν_L 以外に右巻きニュートリノ ν_R が存在することが予想される．ニュートリノの質量がゼロでないというこの実験事実は，標準模型を越える新しい物理の最初の兆候を与えるものとして，多くの研究者の注目を集めている．左右対称電弱理論は初めから ν_R の存在を仮定する．そして，観測されているニュートリノの質量が同じ世代に属する荷電レプトンに比べ非常に小さいことをシーソー機構を使って説明する (世代間の質量のヒエラルキーはまた別の深刻な問題である)．そこで，次節で，左右対称電弱理論の守備範囲でニュートリノ質量の取り扱いを解説する．

その前に，既知の物質粒子の世代構造について，左右対称模型の極限 $\mathsf{v}_R \to \infty$ に対応する GWS 理論の枠で議論しよう．左右対称モデルで，$\mathsf{v}_R \to \infty$ の極限をとると，$W^{\pm}_R, Z_R$ も (次節で説明するように) ν_R も無限大の質量を持つので，理論のスペクトルから抜け落ちる．かつ，ゲージ対称性は $V = e^{-\alpha e_3}$ とおくことに対応して，$(U, e^{-\alpha e_3}) \cong SU(2)_L \times U(1)_Y$ に縮小される．ただし，$Y/2 = I_{3R} + (B-L)/2$. また，$\boldsymbol{Q}_{(U,V)}, \boldsymbol{Q}_{(V,1)}$ に属する場はすべて $\boldsymbol{Q}_L$ または (位相変換しか受けない) ゲージ・シングレット $\boldsymbol{Q}^0$ に含まれる．(7.29) の第 2 段階目の破れを引き起こす Higgs 場は，$\boldsymbol{Q}_L$ に属する $SU(2)_L$ の 2 重項である．クォーク・レプトンの左巻き成分はすべて，$SU(2)_L$ の 2 重項であるが，右

巻き成分は 1 重項に分類される．GWS 理論 (標準模型) の枠内で理解されている物質粒子の 3 世代構造で，最終的には 1994 年に実験的に確かめられた[9]．この物質粒子の世代構造を次にまとめておこう．

	第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代		Q	Y
左巻きレプトン	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$,	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$,	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\cdots$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	-1
右巻きレプトン	e_R,	μ_R,	τ_R	$\cdots$	-1	-2
左巻きクォーク	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$,	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$,	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	$\cdots$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$	$1/3$
右巻きクォーク	u_R,	c_R,	t_R	$\cdots$	$2/3$	$4/3$
右巻きクォーク	d_R,	s_R,	b_R	$\cdots$	$-1/3$	$-2/3$

これが現在我々の到達している素粒子の存在パターンである．各粒子の電荷は公式

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \tag{7.34}$$

で与えられる．ただし，$I_3 \equiv I_{3L}$ で Y は弱超電荷 (ウィーク・ハイパーチャージ) と呼ばれる．Y は上の表では，正しい Q の値を与えるようにフェルミオンの種類だけでなく，カイラリティーにも依存しているが，左右対称模型の $U(1)$ 電荷と，$Y/2 = I_{3R} + (1/2)(B-L)$ のように関係しているので，左右対称模型ではその依存性の由来が明確になる．すなわち，量子数 $B-L$ はフェルミオンの種類のみに関係するが，I_{3R} はカイラリティーにしか依らない．

7.3　ニュートリノの質量

この節では，左右対称電弱理論の枠内で，ニュートリノ質量の問題を取り上げる．よく知られているように，右巻きニュートリノ ν_R の存在を仮定しない標準模型は，ニュートリノの質量が厳密にゼロであることを予言する[22]．けれども，ニュートリノが有限の質量を持つことが実験的に証明され，標準模型の何らかの修正ないしは拡張が確かな実験的基盤に立って求められている．30 年以上前に提唱された，左右対称電弱理論の応用の 1 つに，ニュートリノ質量の問題があっ

た．すなわち，このモデルでは，右巻きニュートリノ ν_R の存在が仮定されるので，シーソー機構を使えば，ニュートリノの微小な質量が自然に説明できる[23)]．以下，簡単のため，1 世代モデルに限る．シーソー機構の本質的機能の少なくとも 1 面を理解するには，それで十分である．従って，世代間混合・ニュートリノ振動・レプトンセクターでの CP の破れなどの興味ある物理現象について触れる余裕はない．

左右対称模型におけるフェルミオンの質量項は，Higgs 場 ϕ とフェルミオンの湯川結合

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathrm{Re}\,[\bar{\psi}_L f\phi\psi_R + i\bar{\psi}_L g\phi\psi_R e_3] + \mathrm{h.c.} \tag{7.35}$$

から，ゲージ対称性の自発的破れによって得られる．クォーク・セクターとレプトン・セクターでは湯川結合定数 f, g が異なる (3 世代模型では，3 次のエルミートな行列になる)．(7.35) から得られる作用は一般化された P 変換のもとで不変である．レプトン・セクターの質量項を

$$-\mathcal{L}_m^l = \mathrm{Re}\,[f\bar{\psi}_L\langle\phi\rangle\psi_R + ig\bar{\psi}_L\langle\phi\rangle\psi_R e_3] + \mathrm{h.c.} \tag{7.36}$$

とかく．ここで，(7.27) を使い，フェルミオン 2 重項に対する記号 (7.19) を採用すれば，上式は

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_m^l &= (2\mathsf{v}_0 f)\bar{\Psi}_L\Psi_R + (2\mathsf{v}_3 g)\bar{\Psi}_L\tau_3\Psi_R + \mathrm{h.c.}\\ &= (2\mathsf{v}_0 f + 2\mathsf{v}_3 g)\bar{\psi}^1\psi^1 + (2\mathsf{v}_0 f - 2\mathsf{v}_3 g)\bar{\psi}^2\psi^2\end{aligned} \tag{7.37}$$

となる[24)]．ただし，係数は実数と仮定した．また，$\psi^1 = (\chi_0 - i\chi_3)/\sqrt{2}, \psi^2 = (-i\chi_1 + \chi_2)/\sqrt{2}$ は 4 成分 Dirac スピノルで，$\bar{\psi}^{1,2}$ はその Dirac 共役である．この証明も簡単な四元数計算にすぎないが，念のため以下に記す．

(7.37) の証明

世代についての和を取ることは (7.37) の湯川結合定数 f, g を行列とみなすことに相当する．ここで簡単化した 1 世代模型で，(7.36) から (7.37) を導いておく．(7.27a) から $\langle\phi\rangle = e_0\mathsf{v}_0 + ie_3\mathsf{v}_3$ だから，$\mathrm{Re}\,[q] \equiv [q]_0$ と略記して，

$$[f\bar{\psi}_L\langle\phi\rangle\psi_R]_0$$
$$= f\mathsf{v}_0[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L(\chi_0 + e_j\chi_j)_R]_0 + if\mathsf{v}_3[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L e_3(\chi_0 + e_j\chi_j)_R]_0$$

v_0 を含む項 $= f\mathsf{v}_0[\bar{\chi}_{0\,L}\chi_{0\,R} + \bar{\chi}_{i\,L}\chi_{i\,R}] = 2f\mathsf{v}_0\bar{\Psi}_L\Psi_R$

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_3 \text{ を含む項} &= if\mathrm{v}_3[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L(e_3\chi_0 + e_2\chi_1 - e_1\chi_2 - e_0\chi_3)_R]_0 \\ &= i\mathrm{v}_3[-\bar{\chi}_{0\,L}\chi_{3\,R} + \bar{\chi}_{3\,L}\chi_{0\,R} + \bar{\chi}_{2\,L}\chi_{1\,R} - \bar{\chi}_{1\,L}\chi_{2\,R}] = 0 \end{aligned}$$

となる．v_3 を含む項がゼロになる理由は，Majorana スピノル χ, χ' に対して $\bar{\chi}_L\chi'_R = \bar{\chi}'_L\chi_R$ が成り立つから．なぜなら χ, χ' が (反可換な) Majorana スピノルであれば，

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_L\chi'_R &= \bar{\chi}P_R\chi' = -\chi^T C^{-1}P_R\chi' = \chi'^T(C^{-1}P_R)^T\chi \\ &= \chi'^T P_R^T C^{T\,-1}\chi = -\chi'^T P_R^T C^{-1}\chi = -\chi'^T C^{-1}P_R\chi = \bar{\chi}'_L\chi_R \end{aligned}$$

のような変形が成り立つ．同じ関係式を使って v_0 を含む項に対する 2 重項記号 (7.19) を使った最後の等式がえられる．次に，

$$\begin{aligned} &[ig\bar{\psi}_L\langle\phi\rangle\psi_R e_3]_0 \\ &= ig\mathrm{v}_0[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L(\chi_0 + e_j\chi_j)_R e_3]_0 - g\mathrm{v}_3[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L e_3(\chi_0 + e_j\chi_j)_R e_3]_0 \\ &\mathrm{v}_0 \text{ を含む項} = ig\mathrm{v}_0[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L(e_3\chi_0 - e_2\chi_1 + e_1\chi_2 - e_0\chi_3)_R]_0 \\ &\qquad\qquad = ig\mathrm{v}_0[-\bar{\chi}_{0\,L}\chi_{3\,R} + \bar{\chi}_{3\,L}\chi_{0\,R} + \bar{\chi}_{1\,L}\chi_{2\,R} - \bar{\chi}_{2\,L}\chi_{1\,R}] = 0 \\ &\mathrm{v}_3 \text{ を含む項} = -g\mathrm{v}_3[(e_0\bar{\chi}_0 - e_i\bar{\chi}_i)_L(-e_0\chi_0 + e_1\chi_1 + e_2\chi_2 - e_3\chi_3)_R]_0 \\ &\qquad\qquad = 2g\mathrm{v}_3\bar{\Psi}_L\tau_3\Psi_R \end{aligned}$$

となる．ここで，再び，Majorana スピノルの性質，$\bar{\chi}_L\chi'_R = \bar{\chi}'_L\chi_R$ を使った．□

(7.37) は，フェルミオンの **Dirac 質量項**を与える．特に，$\mathrm{v}_3 g \neq 0$ のときに限って，電荷の異なるフェルミオンが異なる質量を持ちうる．以下注目する部分はニュートリノを含む項であるから，$\psi^1 = \nu$ とおく．その Dirac 質量項は定義により，Majorana スピノル $\chi_{0,3}$ を用いて

$$m_D\bar{\psi}^1\psi^1 = m_D\bar{\nu}\nu = m_D(\bar{\nu}_R\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_R) = \frac{1}{2}m_D(\bar{\chi}_0\chi_0 + \bar{\chi}_3\chi_3) \tag{7.38}$$

と表せる．ただし，$m_D = 2\mathrm{v}_0 f + 2\mathrm{v}_3 g$ とおいた．実際，

$$\bar{\nu}\nu = \frac{1}{2}(\bar{\chi}_0 + i\bar{\chi}_3)(\chi_0 - i\chi_3) = \frac{1}{2}(\bar{\chi}_0\chi_0 + \bar{\chi}_3\chi_3) + i(\bar{\chi}_3\chi_0 - \bar{\chi}_0\chi_3)$$

であるが，$\chi_{0,3}$ は Majorana スピノルであるから，

$$\bar{\chi}_3\chi_0 = -\chi_3^T C^{-1}\chi_0 = \chi_0^T C^{T\,-1}\chi_3 = -\chi_0^T C^{-1}\chi_3 = \bar{\chi}_0\chi_3$$

が成り立つ．なお，Majorana スピノルの上で証明した性質 $\bar{\chi}'\chi = \bar{\chi}\chi'$ や $\bar{\chi}_L\chi'_R = \bar{\chi}'_L\chi_R$ などは以下断り無しに使う．

結合定数 (一般には世代空間における複素行列) を除けば，すべてのフェルミ

オンを同等に扱う Higgs 場 ϕ と違って，Higgs 場 $\Delta_{L,R}$ はニュートリノとのみ湯川結合をする．$\langle\Delta_L\rangle = 0$ を仮定すれば，ニュートリノ質量を議論するときに限り，Δ_R だけを考えればよい[25)]．その際，不変量は分解 (7.18) の成分 Ψ_R とその複素共役を用いてかかれる (仮定により，フェルミオンの場合は，添字 R は右巻きカイラリティーを表す)．それは，$U(1)$ 電荷の保存を保証するためである．具体的な不変量には，$\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\Delta_R\Psi_R]$ およびそのエルミート共役がある．ここに現れる $\bar{\Psi}_R^T$ の定義は，Ψ_R のそれ

$$\Psi_R = \sqrt{2}(v_1\psi_R^1 + v_2\psi_R^2) \tag{7.39a}$$

に対し

$$\bar{\Psi}_R^T = \sqrt{2}(\bar{v}_1\psi_R^{1\,T} + \bar{v}_2\psi_R^{2\,T}) = \sqrt{2}(v^{1\,\dagger}\psi_R^{1\,T} - v^{2\,\dagger}\psi_R^{2\,T}) \tag{7.39b}$$

である．つまり，四元数 Dirac スピノルの上のバーは依然四元数共役を表すが，4 成分スピノルの Dirac 共役は意味しない．その代わりに付けた右上の添字 T が 4 成分スピノルの転置を意味する．ところが，不変量には，$\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\Delta_R\Psi_R]$ $=\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\Delta_R\Psi_R e_0]$ 以外に $\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\Delta_R\Psi_R e_i]\,(i = 1,2,3)$ もある[26)]．しかしながら，(4.68) を用いて $\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_0] = \mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_3] = 0$, $\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_1] = i\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_2]$ が示される．従って，右巻きニュートリノは次の**Majorana 質量項**を獲得する．

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_m^{\nu_R} &= -ih\sqrt{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_1] + \mathrm{h.c.}\\ &= hv_R(-\psi_R^{1\,T}C^{-1}\psi_R^1 + \bar{\psi}_R^1 C\bar{\psi}_R^{1\,T}) = \frac{1}{2}M_R(-\nu_R^T C^{-1}\nu_R + \bar{\nu}_R C\bar{\nu}_R^T)\end{aligned} \tag{7.40}$$

ただし，$\psi_R^1 = \nu_R$ とおき，$M_R = 2h\mathrm{v}_R$ は実数と仮定した．

(7.40) の証明

定義により ($\mathrm{Re}\,[q] \equiv [q]_0$)，

$$\begin{aligned}[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_0]_0 &= 2[(v^{1\,\dagger}\psi_R^{1\,T} - v^{2\,\dagger}\psi_R^{2\,T})C^{-1}\frac{v_R}{\sqrt{2}}v_2(v_1\psi_R^1 + v_2\psi_R^2)]_0\\ &= \sqrt{2}v_R[(v^{1\,\dagger}\psi_R^{1\,T} - v^{2\,\dagger}\psi_R^{2\,T})C^{-1}v_2\psi_R^1]_0 = 0\\ [\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_1]_0 &= 2[(v^{1\,\dagger}\psi_R^{1\,T} - v^{2\,\dagger}\psi_R^{2\,T})C^{-1}\frac{v_R}{\sqrt{2}}v_2(v_1\psi_R^1 + v_2\psi_R^2)e_1]_0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}v_R[(v^{1\dagger}\psi_R^{1T} - v^{2\dagger}\psi_R^{2T})C^{-1}(-iv^1)\psi_R^1]_0 \\
&= -i\frac{1}{\sqrt{2}}v_R\psi_R^{1T}C^{-1}\psi_R^1 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}v_R\nu_R^T C^{-1}\nu_R \\
[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_2]_0 &= 2[(v^{1\dagger}\psi_R^{1T} - v^{2\dagger}\psi_R^{2T})C^{-1}\frac{v_R}{\sqrt{2}}v_2(v_1\psi_R^1 + v_2\psi_R^2)e_2]_0 \\
&= \sqrt{2}v_R[(v^{1\dagger}\psi_R^{1T} - v^{2\dagger}\psi_R^{2T})C^{-1}(-v^1)\psi_R^1]_0 \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}v_R\psi_R^{1T}C^{-1}\psi_R^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_R\nu_R^T C^{-1}\nu_R
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
[\bar{\Psi}_R^T C^{-1}\langle\Delta_R\rangle\Psi_R e_3]_0 &= 2[(v^{1\dagger}\psi_R^{1T} - v^{2\dagger}\psi_R^{2T})C^{-1}\frac{v_R}{\sqrt{2}}v_2(v_1\psi_R^1 + v_2\psi_R^2)e_3]_0 \\
&= \sqrt{2}v_R[(v^{1\dagger}\psi_R^{1T} - v^{2\dagger}\psi_R^{2T})C^{-1}(-iv_2)\psi_R^1]_0 = 0
\end{aligned}
$$

が得られるから，(7.40) の上にかかれた事実および (7.40) が証明された．□

(7.38) と (7.40) の和がニュートリノの質量項を与える．

$$
-\mathcal{L}_m^\nu = m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) + \frac{M_R}{2}(-\nu_R^T C^{-1}\nu_R + \bar{\nu}_R C\bar{\nu}_R^T) \tag{7.41}
$$

この式から，ニュートリノの質量固有状態を求めるため，

$$
N_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_L + {\nu_L}^c) \tag{7.42a}
$$

$$
N_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_R + {\nu_R}^c) \tag{7.42b}
$$

によって，2 つのスピノル $N_{L,R}$ を定義する．ただし，${\nu_{L,R}}^c \equiv (\nu_{L,R})^c$ である．従って，${N_L}^c = N_L$, ${N_R}^c = N_R$ となり，$N_{L,R}$ は共に Majorana スピノルである．また，各々は Weyl 表示で 2 成分スピノル $\xi, \bar{\eta}$ の片方のみを含む．

$$
\nu = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad \nu_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad \nu_R = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
N_L = \begin{pmatrix} -\varpi\bar{\eta}^* \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad N_R = \begin{pmatrix} \xi \\ \varpi\xi^* \end{pmatrix} \tag{7.42c}
$$

すなわち，N_L は左巻き成分 $\bar{\eta}$ のみを，N_R は右巻き成分 ξ のみから成る．4 成分スピノルに対する恒等式 $\overline{{\nu_L}^c}{\nu_R}^c = \bar{\nu}_R\nu_L$, $\overline{{\nu_R}^c}{\nu_L}^c = \bar{\nu}_L\nu_R$, $\overline{{\nu_L}^c}\nu_R = \overline{{\nu_R}^c}\nu_L = \bar{\nu}_L{\nu_R}^c = \bar{\nu}_R{\nu_L}^c = 0$ を使って，

$$\bar{N}_L N_R + \bar{N}_R N_L = \bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L \tag{7.43a}$$

が得られる．さらに，$\bar{\nu}_L \nu_L = \overline{\nu_L{}^c} \nu_L{}^c = 0$, $\overline{\nu_L{}^c} \nu_L = -\nu_L^T C^{-1} \nu_L$, $\bar{\nu}_L \nu_L{}^c = \bar{\nu}_L C \bar{\nu}_L^T$ および $L \to R$ とした同様の式を使えば，

$$\bar{N}_L N_L = \frac{1}{2}(-\nu_L^T C^{-1} \nu_L + \bar{\nu}_L C \bar{\nu}_L^T) \tag{7.43b}$$

$$\bar{N}_R N_R = \frac{1}{2}(-\nu_R^T C^{-1} \nu_R + \bar{\nu}_R C \bar{\nu}_R^T) \tag{7.43c}$$

となることがわかる．(7.43) の結果を用いると，(7.41) は次のようにかき直せる[27)]．

$$-\mathcal{L}_m^\nu = (\bar{N}_L, \bar{N}_R) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_L \\ N_R \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

湯川結合定数 f, g, h はすべて同じ $\mathcal{O}(1)$ とすれば，$m_D \cong \mathcal{O}(\mathsf{v}_{0,3}), M_R \cong \mathcal{O}(\mathsf{v}_R)$ である．前節の議論により，$\mathsf{v}_R \gg \mathsf{v}_{0,3}$ ゆえ，$M_R \gg m_D$ が成り立つ．この近似で上式に現れるニュートリノの質量行列を対角化すれば，

$$-\mathcal{L}_m^\nu = -\frac{m_D^2}{M_R} \bar{\nu}_1 \nu_1 + M_R \bar{\nu}_2 \nu_2 \tag{7.45a}$$

$$\nu_1 = N_L - \frac{m_D}{M_R} N_R \tag{7.45b}$$

$$\nu_2 = \frac{m_D}{M_R} N_L + N_R \tag{7.45c}$$

となる．ここで，$m_{\nu_1} = \dfrac{m_D^2}{M_R} \ll m_{\nu_2} = M_R$ である．ニュートリノの質量固有状態 ν_1, ν_2 はいずれも Majorana 粒子である (Majorana ニュートリノ)．ν_2 を重くすれば，ν_1 は同じ世代の荷電レプトンより非常に軽くなる．仮に，ニュートリノの典型的な質量の値を 1 eV (電子の質量は 0.51 MeV) とすれば，$m_D \sim$ 1 GeV ととって，$M_R \sim 10^9$ GeV 位になる．これが，**シーソー機構**[5)] と呼ばれる，新しいエネルギースケール M_R の導入により，観測されているニュートリノの微小な質量を説明する方法である．この機構は ν_R が自然に導入されるモデルにとっては，決定的に重要な役割を果たす．なお，シーソー機構の本質は，単にニュートリノ質量の問題だけでなく，実験データからの M_R の評価の他に，ニュートリノの世代間混合，ニュートリノ振動などの定量的説明ができるかどう

かにも真価が問われていることを付け加えておく．従って，1世代模型はシーソー機構の1面は理解できても，簡単化のし過ぎであることは言を待たない．

ところで，$\nu = \psi^1 = (\chi_0 - i\chi_3)/\sqrt{2}$ であるから，そのカイラル成分は

$$\nu_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{0\,L} - i\chi_{3\,L}) \tag{7.46a}$$

$$\nu_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{0\,R} - i\chi_{3\,R}) \tag{7.46b}$$

となる．これらの荷電共役は $(\chi_{0\,L})^c = \chi_{0\,R}, (\chi_{0\,R})^c = \chi_{0\,L}$ などに注意すれば，

$$\nu_L{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{0\,R} + i\chi_{3\,R}) \tag{7.47a}$$

$$\nu_R{}^c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{0\,L} + i\chi_{3\,L}) \tag{7.47b}$$

で与えられるから，(7.42a,b) の Majorana スピノルは

$$\begin{aligned} N_L &= \frac{1}{2}[(\chi_0 - i\chi_3)_L + (\chi_0 - i\chi_3)_L{}^c] \\ &= \frac{1}{2}[(P_L\chi_0 - iP_L\chi_3) + (P_R\chi_0 + iP_R\chi_3)] = \frac{1}{2}(\chi_0 - i\gamma_5\chi_3) \end{aligned} \tag{7.48a}$$

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{1}{2}[(\chi_0 - i\chi_3)_R + (\chi_0 - i\chi_3)_R{}^c] \\ &= \frac{1}{2}[(P_R\chi_0 - iP_R\chi_3) + (P_L\chi_0 + iP_L\chi_3)] = \frac{1}{2}(\chi_0 + i\gamma_5\chi_3) \end{aligned} \tag{7.48b}$$

となるので，

$$\bar{N}_L N_R + \bar{N}_R N_L = \frac{1}{2}(\bar{\chi}_0\chi_0 + \bar{\chi}_3\chi_3) \tag{7.49a}$$

$$\bar{N}_L N_L = \frac{1}{4}(\bar{\chi}_0\chi_0 - \bar{\chi}_3\chi_3) - \frac{i}{4}(\bar{\chi}_0\gamma_5\chi_3 + \bar{\chi}_3\gamma_5\chi_0) \tag{7.49b}$$

$$\bar{N}_R N_R = \frac{1}{4}(\bar{\chi}_0\chi_0 - \bar{\chi}_3\chi_3) + \frac{i}{4}(\bar{\chi}_0\gamma_5\chi_3 + \bar{\chi}_3\gamma_5\chi_0) \tag{7.49c}$$

が得られる．これを (7.43) と比較すれば，(7.44) を再現する．馴染み深い記号 $\nu_{L,R}$ を終始用いる方法は，問題の理解にとって必要不可欠であるが，理論に導入された Majorana スピノル $\chi_{0,3}$ のみを用いて，ニュートリノの質量問題を議論することもできることがわかった．その際，$(\chi_0 \pm i\chi_3)$ は複素 Dirac スピノルであるが，$(\chi_0 \pm i\gamma_5\chi_3)$ が再び Majorana スピノルになる点を利用した．

すなわち，χ が Majorana 条件 $\chi^c = \chi$ を満たせば，$i\gamma_5\chi$ も Majorana 条件 $(i\gamma_5\chi)^c = C\overline{(i\gamma_5\chi)}^T = C(i\gamma_5^T)\bar{\chi}^T = i\gamma_5 C\bar{\chi}^T = i\gamma_5\chi^c = i\gamma_5\chi$ を満たす．

この章では，四元数場のゲージ理論が左右対称電弱模型における基本的仮定を自然に導くことを見た．左右対称電弱模型は素粒子の質量生成に関して，GWS 理論と同様に，Higgs 機構を仮定するので，Higgs セクターの構造は標準模型に比べて著しく複雑になり，様々な (良い面もあれば悪い面もある) 問題を提起している．よりスマートなゲージ対称性の破れ・質量生成機構がわかれば，標準模型も当然ながら，左右対称電弱模型は別の角度から見直されるかもしれない．いずれにしても，将来の実験と理論の発展を待たねばならない．この章と第 5 章の「四元数 Dirac 理論」をあわせると，素粒子の存在パターンを特徴づける，スピン・香り (flavor) の自由度 (世代構造) が，四元数に関係しているという考えを述べたことになる．次章では，四元数を拡張した，しかも Hurwitz 代数の最後のメンバーである八元数を用いてクォーク・レプトンを記述する方法について述べよう．そこでは，クォーク・レプトンを八元数 Dirac 場によって記述することにより，クォークの持つ色 (color) の自由度とその力学を導き，なぜクォークとレプトンが必ず対になって現れる (これは，ゲージ理論の繰り込み可能性，つまり，各世代における量子異常の相殺によって説明される) のか，なぜそれらが関与する相互作用が大きく異なるのかという疑問に対する形式的な答えを見出す．さらに，通常，力学的問題と捉えられているクォークの閉じ込めについて，これまでになされた代数的アプローチを紹介する．

第 7 章の注および参考文献

1) L. S. Pontrjagin は，第 1 章文献 1) で引用した著書において,「任意の局所コンパクトで連結な位相体は，実数体か，複素数体か，四元数体の何れかに同型である」ことを証明している (体 K が位相空間で K の代数演算がその位相に関して連続な場合，K を**位相体**と呼ぶ．位相空間 R が**局所コンパクト**とは，R の各点において，近傍 U の閉包 $\overline{U}$ (集合 U にその集積点があればそれらをすべて付け加えて得られる集合) がコンパクトであるものが存在することをいう).

*2) この章と次章では再び第 1~3 章の記号を使う．特に，この章 (と次章) で考える四元数場は**内部四元数場**と呼ぶべきもので，場の内部対称性に関して定義されている．それに対して，前章の四元数場は場の外部対称性に関して定義された**外部四元数場**という意味を持つ (その意味では，第 5 章の四元数 Dirac 場も外部四元数場である)．前章と同じ言葉を使うが，この章の四元数場は意味が違うことに注意されたい．

3) S.L.Glashow, 'Partial-Symmetries of Weak Interactions', Nucl.Phys.**22** (1961), pp.579-588.
S.Weinberg, 'A Model of Leptons', Phys.Rev.Lett.**19**(1967), pp.1264-1266.
A. Salam, 'Weak and Electromagnetic Interactions', in'*Elementary Particle Theory*', ed. by N.Svartholm, (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968), pp.367-377.

4) 左右対称電弱理論の初期の文献としては次のものを挙げておく．
J. C.Pati and A.Salam 'Lepton numbers as the fourth "color"', Phys.Rev. **D10**(1974), pp.275-289.
R.N.Mohapatra and J.C.Pati, 'Left-right symmetry and an "isoconjugate" model of CP violation', Phys.Rev. **D11**(1975), pp.566-571.
R.N.Mohapatra and J.C.Pati, ' "Natural" left-right symmetry', Phys.Rev. **D11** (1975), pp.2558-2561.
G.Senjanović and R.N.Mohapatra, 'Exact left-right symmetry and spontaneous violation of parity', Phys.Rev. **D12**(1975), pp.1502-1505.
R.N.Mohapatra and R.E.Marshak, 'Local $B-L$ Symmetry of Electroweak Interactions, Majorana Neutrinos, and Neutrino Oscillations', Phys.Rev.Lett. **44**(1980), pp.1316-1319.
R.E.Marshak and R.N.Mohapatra, 'Quark-Lepton Symmetry and $B-L$ as the $U(1)$ Generator of Electroweak Symmetry Group', Phys.Lett. **91B**(1980), pp.222-224.
総合報告としては次のものが代表的であろう．
G.Senjanović, 'Spontaneous Breakdown of Parity in a class of Gauge Theories', Nucl. Phys. **B153**(1979), pp.334-365.
R. N. Mohapatra, 'CP-Violation and Left-Right Symmetry', p.384 in "*CP Vi-*

olation", Advanced Series on Directions in High Energy Physics, ed. by C. Jarskog, World Scientific, 1989.
最近の発展を見るのには次の論文が参考になろう (いずれも Web で取り寄せることができる).
J. F. Gunion, J. Grifols, A. Mendez, B. Kayser and F. Olness, 'Higgs bosons in left-right-symmetric models', Phys.Rev. **D40**(1989), pp.1546-1561.
N.G.Deshpande, J.F. Gunion, B. Kayser, F.Olness, 'Left-Right Symmetric Electroweak Models with Triplet Higgs', Phys.Rev. **D44**(1991), pp.837-858.
G. Barenboim, M. Gorbahn, U. Nierste and M. Raidal, 'Higgs sector of the minimal left-right symmetric model', Phys.Rev. **D65**(2002), 095003.
P. Ball, J.-M. Frère, and J. Matias, 'Anatomy of Mixing-Induced CP Asymmetries in Left-Right-Symmetric Models with Spontaneous CP Violation', Nucl. Phys. **B572**(2000), pp.3-35.
Y. Rodríguez and C. Quimbay, 'Spontaneous CP Phases and Flavour Changing Neutral Currents in the Left-Right Symmetric Model', Nucl. Phys. **B637**(2002), pp.219-242.
Y.Zhang, H. An, X. Ji, and R. N. Mohapatra, 'General CP Violation in Minimal Left-Right Symmetric Model and Constraints on the Right-Handed Scale', Nucl. Phys. **B802**(2008), pp.247-279.

5) ニュートリノの質量が同じ世代の荷電レプトンに比べ，極めて小さいことを説明する最も自然な方法は，シーソー機構に基づくものである．この機構は，次の論文で提唱された．
P. Minkowski, '$\mu \to e\gamma$ at a rate of one out of 10^9 muon decays?', Phys.Lett.**B67** (1977), pp.421-428.
T.Yanagida, 'Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos', 95-98, in '*Proceedings of the Workshop on the Unified Theories and the Baryon Number in the Universe*' (O.Sawada and A.Sugamoto,,eds.), KEK Tsukuba, Japan, (1979);Progr. Theor. Phys. **64**(1980), pp.1103-1105.
M.Gell-Mann, P.Ramond, and R.Slansky, 'Complex spinors and unified theories', in '*Supergravity*' (P. van Nieuwenhuizen and D.Z.Freedman, eds.), North Holland, Amsterdam (1979), pp.315-321.
S.L.Glashow, 'The future of elementary particle physics', in *Proceedings of the 1979 Cargése Summer Institute on Quarks and Leptons*' (M.Lévy, J.-Basdevant, D.Speiser, J.Weyers, R.Gastmans, and M.Jacob,eds.), Plenum Press, New Yowk (1980), pp.687-713.
R.N.Mohapatra and G.Senjanović, 'Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation', Phys.Rev.Lett. **44**(1980), pp.912-915.
R.N.Mohapatra and G. Senjanović, 'Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation', Phy.Rev. **D23**(1981), pp.165-180.

なお，最近のニュートリノ物理の進展は目覚ましく，Web で探すと，多くの総合報告がある．ここでは，少し古いが，参考のため, 次の「白書」だけを引用しておく．
Theory of Neutrinos: A White Paper, R.N.Mohapatra et al., hep-ph/0510213.
より新しい総合報告も数多いが，Web で探した限りでは，いずれも大作である．比較的短い総合報告としては，
Z-z. Xing, 'Theoretical Overview of Neutrino Properties', invited talk in 34$^{\rm th}$ International Conference on High Energy Physics, Philadelphia, 2008. hep-ph/0810.1421.
がある．

6) このことは強調してもしすぎることはない．一般のゲージ理論では，ゲージ群と場の表現内容を与えて，理論を展開する．従って，静力学の準備はいわばあっという間に終わる．それに対して，四元数場のゲージ理論は，場が体 $\mathbb{H}$ 上で定義されることから特定のゲージ群を選ぶという意味で，静力学の段階で時間をとられる．四元数場のゲージ理論と左右対称模型の関係は次の拙論で調べられた．
K.Morita, 'Quaternionic Weinberg-Salam Theory', Progr.Theor.Phys.**67**(1982), pp.1860-1876.

7) (4.65) のスプリット基底，$v_1 = (e_0 + ie_3)/2, v_2 = (ie_1 + e_2)/2, v^1 = (e_0 - ie_3)/2, v^2 = (-ie_1 + e_2)/2$, を用いた実数係数の四元数をスプリット (分裂) 四元数という (第 1.7 節参照)．従って，任意のスプリット四元数は，$q = v_1x_0 + v_2x_1 + v^1x_2 + v^2x_3, x_\mu \in \mathbb{R}\ (\mu = 0, 1, 2, 3)$ とかける．これを，$q = e_\mu q_\mu = e_0q_0 + e_iq_i$ に等しくおいて，$q_0 = (x_0 + x_2)/2, q_1 = i(x_1 - x_3)/2, q_2 = (x_1 + x_3)/2, q_3 = i(x_0 - x_2)/2$ を得る．スプリット四元数の共役を $\bar{q} = \bar{e}_\mu q_\mu = e_0q_0 - e_iq_i$ と定義すれば，スプリット四元数に対しても組成法則は成り立つが，$N(q) = q\bar{q} = q_0^2 - |q_1|^2 + q_2^2 - |q_3|^2$ は符号数 $(2, 2)$ を持つ 2 次形式となる．ゆえに，零因子が存在するので，最早ノルム多元環ではない．零因子の存在そのものはスプリット基底の乗積表から明らかである．

8) $f_{\mu\nu} \to \bar{f}_{\mu\nu}$ が第 0 成分の複素共役も含むため，$\bar{f}_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ は見かけによらず実ではない．そのため，(7.15) の各項では実部を取らねばならない．

9) クォークの 3 世代模型は，CP 不変性の破れに関連して，小林誠と益川敏英が提唱した．
M. Kobayashi and T. Maskawa, 'CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction', Progr. Theor. Phys. **49**(1973), pp.652-657.
小林・益川理論はその後実験的に検証され，素粒子の標準模型において基本的な骨組みの 1 つになっている．

10) (7.19c,d) の表に現れるレプトンにはレプトン数 $L = 1$，バリオン数 $B = 0$ (反レプトンには $L = -1, B = 0$) をあてがい，クォークにはバリオン数 $B = 1/3$，レプトン数 $L = 0$ (反クォークには $B = -1/3, L = 0$) をあてがう．

11) 標準模型では，$U(1)_{B-L}$ が大域的な偶然対称性として残る．その対称性に量子異常が存在しないので，それを矛盾のない局所ゲージ対称性に拡張できる．GWS 理論，標準理論も左右対称模型も，クォークがカラーと呼ばれる 3 つの自由度を持ち，レプトンは

カラー・シングレットである (カラーを持たない) ことから，各世代毎に量子異常が相殺し，理論の繰り込み可能性が保証されている．

12) R.N.Mohapatra, 'Left-Right Symmetry, Composite Models and Baryon Number of The Universe', MPI-PAE/PTh 1/81, Jan. 1981, invited talk at the VPI-Workshop on "Weak Interactions as Probes of Unification", Dec.4-6 (1980).

13) ϕ は 2 重項なので，正確には，$\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ とかくべきだが，これを簡単のため，$\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2}$ とかいた．以下同様の略記法を使うことがある．

14) この式だけでは，$U = V = e^{+\alpha e_3}$ という解も可能だが，後に，$\langle\Delta_R\rangle \neq 0$ が条件 (7.28) を満たすには，$V = e^{-\alpha e_3}$ でなければならないことがわかる．

15) 質量の固有状態は (7.22d,e) のゲージボソン $W^{1,2}_{L,R}$ の線形結合，および，$W^3_{L,R}$, C の線形結合で与えられる．

16) この場合も，質量の固有状態は (7.22d,e) のゲージボソン $W^{1,2}_{L,R}$ の線形結合である質量の固有状態 $W^{\pm}_R$ に直交する線形結合および，ゲージボソン $W^3_{L,R}$, C の線形結合である質量の固有状態 Z_R に直交する線形結合で与えられる．フェルミオンの質量については，次節参照．

17) Particle Data Group, Physics Letters B, Review of Particle Physics, July (2008).

18) ϕ には電気的に中性な成分が 4 つある．そのうち，2 つはゲージボソン $Z_{L,R}$ に吸われるが，まだ 2 つの中性成分が残る．これは，一般にクォーク・レプトンの世代間を跨ぐ電荷を変えない遷移をもたらし，理論に内在する Flavor Changing Neutral Current (FCNC) の問題として，議論されている．上の 4) で挙げた論文および 5) の P.Minkowski の論文を参照のこと．

19) P. Duke, J. Gluza and M.Zalek, 'Quantization and renormalization of the manifest left-right symmetric model of electroweak interactions', Ann.Phys. **280**(2000), pp.336-408; hep-ph/9910279

20) 離散対称性が自発的に破れるときに生ずるとされる，宇宙論的な領域壁 (ドメイン・ウォール) の問題
Y.B.Zel'dovich, I.Y.Kobzarev and L.B.Okun, 'Cosmological consequences of a spontaneous breakdown of a discrete symmetry', Sov.Phys.-JETP, **40**(1975), pp.1-5.
は，ここでは無視する．直接左右対称模型を取り扱っているわけではないが，次の論文を参照．
J.Preskill, S.P.Trivedi,F.Wilczek,M.Wise, 'Cosmology and Broken Discrete Symmetry', Nucl.Phys. **B363**(1991), pp.207-220.
G.Dvali G.Senjanović, 'Is there a domain wall problem?', Phys.Rev.Lett.**74** (1995), pp.5178-5181.

21) T.D.Lee, 'New Insights to Old Problems', hep-ph/0605017, invited talk given

at the 2006 APS Meeting as the first presentation in the Session on 50 Years Since the Discivery of Parity Nonconservation in Weak Interaction I, April 22, 2006(Appendix A).

22) GWS 理論のスペクトルには，右巻きニュートリノ ν_R が存在しないので，ニュートリノの裸の Dirac 質量項は存在しない．左巻きニュートリノ ν_L だけで作られる Majorana 質量項 $\sim \nu_L^T C^{-1}\nu_L$ はレプトン数を保存しない．それ故，レプトン数を保存する標準模型は繰り込み理論を用いた摂動論の範囲でニュートリノが質量を持つことを禁止する．これは，非摂動論的にも正しい．標準模型では，インスタントンによる非摂動効果のため，B, L 別々に保存則が破れるが，$B-L$ は保存されるからである．

23) 5) で引用した Mohapatra-Senjanović の論文を参照せよ．

24) 3 世代模型では，湯川結合定数 f, g は世代空間における複素行列となり，世代を区別する添字を持った $\psi^{1,2}$ はフレーバー基底と呼ばれ，質量の固有状態ではない．質量の固有状態に移るとき，世代間混合が生じ，有名な小林・益川理論による，CP 不変性の破れを説明する．その際，CP 不変性の破れを説明する為には，最小限 3 世代必要であるというのが，小林・益川理論である．ただしこれはクォークセクターの話であり，レプトンセクターでは，CP 不変性の破れはまだ見つかってない．クォーク・レプトンが同じ世代構造を持つのは，非可換ゲージ理論の繰り込み可能性の要請によると理解されている．

25) ただし，ラグランジアンは一般化された P 変換のもとで不変であることを要求するので，Δ_R とともに，Δ_L の湯川結合も含む．

26) Higgs 場 ϕ とフェルミオンの湯川結合が (7.35) に限られたのは，$\psi_{L,R}$ が右からかかる変換性 (7.4) に従うためであった．$\psi_{L,R}$ の成分 $\Psi_{L,R}$ を用いるときには，右からかかるという変換性は最早定義されていない．これが，不変量の定義に e_i の現れる理由である．

27) ニュートリノの運動エネルギー項は

$$\frac{1}{2}[\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu-(\partial_\mu\bar{\nu})\gamma^\mu\nu]=\frac{1}{2}[\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L-(\partial_\mu\bar{\nu}_L)\gamma^\mu\nu_L]+(L\leftrightarrow R)$$
$$=\frac{1}{2}[\bar{N}_L\gamma^\mu\partial_\mu N_L-(\partial_\mu\bar{N}_L)\gamma^\mu N_L]+(L\leftrightarrow R)$$

のように $N_{L,R}$，従って，質量の固有状態 $\nu_{1,2}$ の対角項になる．この式を証明する為，

$$\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu{\nu_L}^c=\bar{\nu}P_R\gamma^\mu\partial_\mu C\overline{(P_L\nu)}^T=\bar{\nu}P_R\gamma^\mu\partial_\mu CP_R^T\bar{\nu}^T=\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu P_LP_RC\bar{\nu}^T=0$$
$$\bar{\nu}_L{}^c\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L=-(P_L\nu)^TC^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu(P_L\nu)$$
$$=-\nu^TP_L^TC^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu P_L\nu=-\nu^TC^{-1}(P_L\gamma^\mu\partial_\mu P_L)\nu=0$$

を使えば，まず

$$\bar{N}_L\gamma^\mu\partial_\mu N_L=\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L+\bar{\nu}_L{}^c)\gamma^\mu\partial_\mu(\nu_L+{\nu_L}^c)=\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L+\bar{\nu}_L{}^c\gamma^\mu\partial_\mu{\nu_L}^c)$$

が導かれる．ところが，

$$\bar{\nu}_L{}^c\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L{}^c = -\nu_L^T C^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu C\bar{\nu}_L^T = -\partial_\mu\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L$$

であるから

$$\bar{N}_L\gamma^\mu\partial_\mu N_L = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L + \bar{\nu}_L{}^c)\gamma^\mu\partial_\mu(\nu_L + \nu_L{}^c) = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L - \partial_\mu\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L)$$

が成り立つ．同様に，

$$-(\partial_\mu\bar{N}_L)\gamma^\mu N_L = -\frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{\nu}_L + \bar{\nu}_L{}^c)\gamma^\mu(\nu_L + \nu_L{}^c) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L)$$

も正しい．(7.22a,c) では簡単のため，微分を片方のスピノル場に対してだけ作用させた．全微分項は運動方程式にはきかないので，$\bar{N}_L\gamma^\mu\partial_\mu N_L = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L + \bar{\nu}_L{}^c)\gamma^\mu\partial_\mu(\nu_L + \nu_L{}^c) = \bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L$ とおいてよい．

第 8 章

八元数 Dirac 場の $SU(3)$ ゲージ理論

現在，物質の基本構成要素と考えられているクォーク・レプトンのうち，クォークは極めて特異な性質を持っている．すべてのハドロンとレプトンは整数電荷を持つのに対し，ハドロンの構成要素と仮定されるクォークの電荷は半端である．ハドロンやレプトンはすべて単独に取り出されてその性質が詳細に調べられている (あるいはつつある) が，クォークは今まで単独の粒子として観測にかかったことがない．それにも拘わらず，クォークがハドロンを構成していると仮定して，その力学が，量子色力学 (Quantumchromodynamics, QCD) という厳密な $SU(3)$ ゲージ理論で与えられるとすれば，ハドロンに関するさまざまな現象が非常に旨く説明できる．今やクォークの存在を疑う人は殆どいない．ハドロンの関与する強い相互作用の微視的理論が QCD なのである．QCD は漸近的自由性という性質を持つため，実験で観測されている，クォークの近距離での自由粒子的振る舞いを説明するだけでなく，いわばその反動として，遠距離ではクォークを孤立して引き離すことができず，結局クォークはハドロンの中に閉じこめられると信じられている．これをクォークの閉じこめという．

少なくとも加速器で到達しうるエネルギー・スケールでは，このような顕著な差異を見せるクォーク・レプトンが物質の同じ階層に属するという標準模型の基本的立場 (この同質性こそ，大統一理論への主たる動機になっている) に立って，それらを四元数 Dirac 場で記述する試みを前章で行った．その試みは，クォーク・レプトンが共通して持つ《香り (flavor)》の自由度に関係する．この章では，クォークは持つがレプトンは担わない《色 (color)》の自由度に関わる事柄を八元数の代数的構造と関連させて議論する．この神秘的な結びつきを始めて議論したのは，Günaydin-Gürsey である (1973-74)．この可能性を方法論的に拡張すれば，QCD は八元数 Dirac 場のゲージ理論として導ける．ただ，八元数は非結

合型代数なので，そのゲージ理論を導くのに，微分形式は使えない．積分形式と呼ばれるものを使う．さらに，複素スカラー積を持つ八元数 Hilbert 空間を用いて，クォーク閉じこめの代数的側面を議論する．

8.1 局所四元数とゲージ理論の積分形式

この節では，四元数場に対する $SO(3)$ ゲージ理論をゲージ理論の微分形式と積分形式 (C.N.Yang[1]) の両方で構成し，次節の準備とする．

はじめに四元数スカラー場 (7.2) を改めて，

$$\phi(x) = e_0\phi_0(x) + e_i\phi_i(x) \tag{8.1a}$$

とかく[*2]．ここで，$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ は四元数の基底で，成分場 $\phi_{0,1,2,3}$ はすべて Lorentz スカラーな実場 (エルミート場) とする．(8.1a) に対して仮定するゲージ変換則と共変微分は

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(x)\phi(x)\overline{U}(x), \quad U(x) \in SL(1, \mathbb{H}) \tag{8.1b}$$

$$D_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi + [A_\mu, \phi], \quad A_\mu = e_i A_\mu^i \tag{8.1c}$$

$$A_\mu \to A'_\mu = UA_\mu\bar{U} + U\partial_\mu\bar{U} \tag{8.1d}$$

で，$SO(3)$ ゲージ不変なラグランジアンは $\partial_\mu \to D_\mu$ によって得られる (ϕ_0 はゲージ相互作用しない)．ただし，ゲージ場に対する Yang-Mills のラグランジアンも加える．既に述べたように，$\partial_\mu \to D_\mu$ がゲージ理論の**微分形式**である．明らかに，微分形式が許されるのは，四元数が結合法則を満たすことによる．例えば，(8.1b) は $\phi' = (U\phi)\overline{U} = U(\phi\overline{U}) \equiv U\phi\overline{U}$ である．一般に行列表現を持つ Lie 群に対して，微分形式を適用してゲージ理論が導けるのは，行列が結合法則を満たすからである．しかし，八元数は結合法則を満たさないので，八元数場のゲージ理論を定式化するのに，微分形式は応用できない．つまり，非結合型代数 (多元環) に値を持つ場に対しては共変微分が定義できない．

そこで，四元数の結合法則を使わないで上と同じゲージ理論を導くにはどうすればよいか考える．今度は，四元数スカラー場を (8.1a) と違って，

$$\phi(x) = e_0\phi_0(x) + e_i(x)\phi_i(x) \tag{8.2a}$$

とおく．ここで，$\{e_i(x)\}$ は Hamilton の虚数単位を各時空点において定義したもので

$$e_i(x)e_j(x) = -\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k(x),\ x \in M_4 \tag{8.2b}$$

を満たす， Lorentz スカラー量とする．$e_i(x)$ と可換な単位元 e_0 は時空点に依存しないとするが，各時空点において $\{e_0, e_i(x)\}$ により張られる代数を**局所四元数** $\mathbb{H}_x$ と呼ぶ．場 (8.2a) は次の変換のもとで不変である．

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &\to \phi'_0(x) = \phi_0(x)\\ \phi_i(x) &\to \phi'_i(x) = S_{ij}(x)\phi_j(x)\\ e_0 &\to e'_0 = e_0\\ e_i(x) &\to e'_i(x) = e_j(x)S^{-1}_{ji}(x)\end{aligned} \tag{8.2c}$$

ただし，$S(x) \equiv (S_{ij}(x)) \in SO(3)$ である．なぜ，$S(x)$ が $SO(3)$ に属すべきかというと，局所四元数の代数 (8.2b) が不変になるのはその場合だけであるから．実際

$$\begin{aligned}e'_i(x)e'_j(x) &= e_k(x)S^{-1}_{ki}(x)e_l(x)S^{-1}_{lj}(x) = (-\delta_{kl}e_0 + \varepsilon_{klm}e_m(x))S^{-1}_{ki}(x)S^{-1}_{lj}(x)\\ &= -\delta_{ij}e'_0 + \varepsilon_{ijk}e'_k(x) = -\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_m(x)S^{-1}_{mk}(x)\end{aligned} \tag{8.2d}$$

が成り立つのは

$$S^{-1}_{ki}(x)S^{-1}_{kj}(x) = \delta_{ij},\quad \varepsilon_{klm}S^{-1}_{ki}(x)S^{-1}_{lj}(x) = \varepsilon_{ijk}S^{-1}_{mk}(x) \tag{8.2e}$$

の場合に限るが，これは $S(x) = (S_{ij}(x)) \in SO(3)$ を意味する．すなわち $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}_x)$ = 局所 $SO(3)$ という殆ど自明な結果を得る (1.4 節で $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = SO(3)$ を違うやり方で見た)．

そこで，次に x, y を異なる時空点として，$\mathbb{H}_x$ と $\mathbb{H}_y$ は同型であることを要請しよう．このときの同型写像を $U(y,x)$ とする．この同型写像の微分作用素 ∇_μ は，x には μ で指定される 4 つの成分があることに注意して，ライプニッツ・ルール

$$\nabla_\mu(e_i(x)e_j(x)) = (\nabla_\mu e_i(x))e_j(x) + e_i(x)(\nabla_\mu e_j(x)) \tag{8.3a}$$

を満たす．この解は

$$\nabla_\mu e_i(x) = e_j(x)B_{\mu,\,ji}(x), \quad \nabla_\mu \bar{e}_i(x) = \bar{e}_j(x)B_{\mu,\,ji}(x), \quad B_{\mu,\,ij} = -B_{\mu,\,ji} \tag{8.3b}$$

で与えられる．なぜなら，(8.3b) を (8.3a) に代入すれば，

$$\begin{aligned}(8.3\text{a})\ \text{の左辺} &= \nabla_\mu(e_i(x)e_j(x)) = \nabla_\mu(-\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k(x)) \\ &= \varepsilon_{ijk}\nabla_\mu e_k(x) = \varepsilon_{ijk}e_m(x)B_{\mu,\,mk}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8.3\text{a})\ \text{の右辺} &= e_l(x)B_{\mu,\,li}(x)e_j(x) + e_i(x)e_l(x)B_{\mu,\,lj}(x) \\ &= (-\delta_{lj}e_0 + \varepsilon_{ljm}e_m(x))B_{\mu,\,li}(x) \\ &\quad + (-\delta_{il}e_0 + \varepsilon_{ilm}e_m(x))B_{\mu,\,lj}(x) \\ &= e_0(-B_{\mu,\,ji}(x) - B_{\mu,\,ij}(x)) \\ &\quad + e_m(x)(\varepsilon_{ljm}B_{\mu,\,li}(x) + \varepsilon_{ilm}B_{\mu,\,lj}(x))\end{aligned}$$

となるが，この右辺第 1 項がゼロになるべきことから，(8.3b) の最後の式 ($B_\mu = (B_{\mu,\,ji})$ の反対称性) が示される．その結果，$B_{\mu,\,ji}(x) = \varepsilon_{ijk}B^k_\mu(x)$ とかける．従って，

$$\begin{aligned}(8.3\text{a})\ \text{の左辺} &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmr}e_m(x)B^r_\mu(x) = (\delta_{im}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jm})e_m(x)B^r_\mu(x) \\ &= e_i(x)B^j_\mu(x) - e_j(x)B^i_\mu(x) \\ (8.3\text{a})\ \text{の右辺} &= e_m(x)(\varepsilon_{ljm}\varepsilon_{ilr}B^r_\mu(x) + \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jlr}B^r_\mu(x)) \\ &= e_m(x)[(-\delta_{ji}\delta_{mr} + \delta_{jr}\delta_{mi})B^r_\mu(x) + (\delta_{ij}\delta_{mr} - \delta_{ir}\delta_{mj})B^r_\mu(x)] \\ &= e_i(x)B^j_\mu(x) - e_j(x)B^i_\mu(x) = (8.3\text{a})\ \text{の左辺}\end{aligned} \tag{8.3c}$$

が成り立つ．次に，局所変換 $e_i(x) \to e'_i(x) = e_j(x)S^{-1}_{ji}(x)$ を受けても，解 (8.3b) の形が変わらない，すなわち，

$$\nabla_\mu e'_i(x) = e'_j(x)B'_{\mu,\,ji}(x) \tag{8.3d}$$

が成り立つための条件を探す．微分作用素 ∇_μ は $S(x)$ に作用するとき普通の偏微分 ∂_μ になることに注意すれば，

$$(8.3\text{d})\ \text{の左辺} = \nabla_\mu(e_k(x)S^{-1}_{ki}(x)) = (\nabla_\mu e_k(x))S^{-1}_{ki}(x) + e_k(x)\partial_\mu S^{-1}_{ki}(x)$$

$$= e_l(x)B_{\mu,\,lk}(x)S^{-1}_{ki}(x) + e_l(x)\partial_\mu S^{-1}_{li}(x)$$

$$= e_l(x)[(B_\mu S^{-1})(x) + \partial_\mu S^{-1}(x)]_{li}$$

$$\text{(8.3d) の右辺} = e_l(x)[S^{-1}(x)B'_\mu(x)]_{li} \tag{8.3e}$$

となるので，探している条件は

$$B'_\mu(x) = S(x)B_\mu(x)S^{-1}(x) + S(x)\partial_\mu S^{-1}(x) \tag{8.3f}$$

となる．これは，B_μ が $B_\mu^T = -B_\mu$ を満たす $SO(3)$ ゲージ場の変換則を満たすことを示す．一方，(8.2a) で定義された $\phi(x)$ は局所 $SO(3)$ 不変であるが，微分作用素は

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\phi(x) &= e_0\partial_\mu\phi_0(x) + (\nabla_\mu e_i(x))\phi_i(x) + e_i(x)(\partial_\mu\phi_i(x))\\ &= e_0\partial_\mu\phi_0(x) + e_i(x)(\delta_{ij}\partial_\mu + B_{\mu,\,ij}(x))\phi_j(x)\\ &\equiv e_0\partial_\mu\phi_0(x) + e_i(x)(D_\mu\phi)_i(x)\end{aligned} \tag{8.3g}$$

を満たす．ここで，$\nabla_\mu\phi_{0,i}(x) = \partial_\mu\phi_{0,i}(x)$ であることを使った．(8.3g) の右辺はゲージ変換 (8.2c) のもとで不変である．左辺の $\phi(x)$ もゲージ不変．それ故 ∇_μ は**ゲージ不変微分**である．(8.3g) の $(D_\mu\phi)_i = (\delta_{ij}\partial_\mu + B_{\mu,\,ij})\phi_j$ は成分場に対する共変微分である．これから，$\partial_\mu \to \nabla_\mu$ のおき換えでも $SO(3)$ ゲージ理論が生まれることがわかる (e_0 は大域的なので，ϕ_0 はゲージ相互作用しない)．B_μ を

$$B_\mu = \sum_{i=1}^{3}(-i)T_iB^i_\mu, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k, \quad (T_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk} \tag{8.3h}$$

とおけば，$(\delta_{ij}\partial_\mu + B_{\mu,\,ij})\phi_j = (\delta_{ij}\partial_\mu - \varepsilon_{kij}B^k_\mu)\phi_j$ と $\partial_\mu\phi + [A_\mu, \phi] = e_i(\delta_{ij}\partial_\mu - 2\varepsilon_{kij}A^k_\mu)\phi_j$ を比較して，ゲージ場成分の間の関係

$$B^i_\mu(x) = 2A^i_\mu(x) \tag{8.3i}$$

を得る．これは次のようにしてもわかる．$SO(3)$ の基本表現，$T_i \to t_i = \tau_i/2$ は四元数の Pauli 表現 $e_i \to \rho(e_i) = -i\tau_i$ に対応するから，$B^i_\mu/2 = A^i_\mu$ とおくべき ($\partial_\mu + B_\mu$ と $\partial_\mu + A_\mu$ を比較する) で，これが (8.3i) に他ならない．

ゲージ場の強さは，

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]e_i(x) = e_j(x)F_{\mu\nu,ji}(x)$$
$$F_{\mu\nu} \equiv (F_{\mu\nu,ji}) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu] \tag{8.4}$$

で与えられ，ゲージ共変 $F_{\mu\nu}(x) \to S(x)F_{\mu\nu}(x)S^{-1}(x)$ である．これから，通常の Yang-Mills のラグランジアンが (四元数の結合法則を使わずに) 構成できる．

このようにして，(8.1a) から出発しても，(8.2a,b) から出発しても，同じ $SO(3)$ ゲージ理論が得られる．ただし，結合定数は因子 2 だけ違う．しかしもっと重要な違いは，後者の場合，四元数の結合法則がどこにも使われていないことである．実際，$\partial_\mu \to \nabla_\mu$ のおき換えでゲージ不変なラグランジアンを作るとき，必要な変形は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,[\overline{\nabla_\mu\phi}(x)\cdot\nabla^\mu\phi(x)] &= \partial_\mu\phi_0(x)\partial^\mu\phi_0(x) \\
&\quad + \mathrm{Re}\,[(\bar{e}_i(x)(D_\mu\phi)_i(x))(e_j(x)(D^\mu\phi)_j(x))] \\
&= \partial_\mu\phi_0(x)\partial^\mu\phi_0(x) \\
&\quad + \mathrm{Re}\,[\bar{e}_i(x)e_j(x)](D_\mu\phi)_i(x)(D^\mu\phi)_j(x) \\
&= \partial_\mu\phi_0(x)\partial^\mu\phi_0(x) + (D_\mu\phi)_i(x)(D^\mu\phi)_i(x)
\end{aligned}$$

だけである．ただし，α, β を実数 (または複素数) として，$(\bar{e}_i\alpha)(e_j\beta) = (\bar{e}_ie_j)(\alpha\beta)$ を用いた．

局所四元数を導入して，ゲージ理論を構成する上の方法は積分形式に他ならない．次にそれを見る．(8.3b) の最初の式を積分する．

$$e_i(x) = e_j(y)U_{ji}(y,x) \tag{8.5a}$$
$$U(y,x) \equiv (U_{ji}(y,x)) = L\exp\left(\int_y^x B_\mu(\xi)d\xi^\mu\right) \tag{8.5b}$$

ここで，L は $y \to x$ の経路に沿って，B_μ の引数が紙の上で左から $y\cdots x$ の順序になるように行列 (演算子) を並べる記号である．このとき，$U(y,x)$ は群の性質

$$U(y,z)U(z,x) = U(y,x) \tag{8.5c}$$

を持つ (z は経路 $y \to x$ の上に乗っている) から，

$$U(y, x+\Delta x) - U(y,x) = U(y,x)U(x, x+\Delta x) - U(y,x)$$

$$= U(y,x)B_\mu(x)\Delta x^\mu$$

$$\nabla_\mu e_i(x) = \lim_{\Delta x^\mu \to 0} \frac{e_i(x+\Delta x) - e_i(x)}{\Delta x^\mu} = e_j(x)B_{\mu,\,ji}(x) \tag{8.5d}$$

が言える．従って，$U(y,x)$ も $e_i(x)$ も (8.2a) の $\phi(x)$ もすべて経路に依存する．経路に依存する場に対するゲージ不変微分は Mandelstam[3)]によって導入された．ただし，成分場 $\phi_i(x)$ は局所場である．

任意の Lie 群 G に対し，経路に依存する**非可積分位相因子** $U(y,x)$ の存在を仮定して，そこからゲージ場，ゲージ場の強さ，ゲージ場および任意の表現に属する場のゲージ変換，共変微分などを定義することにより，ゲージ理論を再構成するのが**積分形式**[1)] と呼ばれるものである．積分形式の出発点である，$U(y,x)$ の存在とは次のことを意味する．無限小区間 Δx だけ離れた 2 点間で定義された $U(x,x+\Delta x)$ からゲージ場を導き，無限小平行 4 辺形に対する $U(x,x)$ からゲージ場の強さを定義し，ゲージ変換を

$$U(y,x) \to U'(y,x) = S(y)U(y,x)S^{-1}(x), \quad S(x) \in G \tag{8.6}$$

と定義する．このとき，$U(x,x+\Delta x)$ のゲージ変換から，ゲージ場のゲージ変換則が，無限小平行 4 辺形に対応する $U(x,x)$ のゲージ変換からゲージ場の強さのゲージ共変性が示される．G の任意のユニタリ既約表現に属する場に対する共変微分も定義される．このようにして，ゲージ理論のすべての道具が用意される．ゲージ場の量子論は，ゲージ不変なラグランジアンに基づく通常の処方箋を適用する．

8.2 八元数 Dirac 場の $SU(3)$ ゲージ理論

次に，局所四元数によって定義された四元数場 (8.2a) の Cayley-Dickson 型複素化を考える．すなわち，すべての成分場 $\phi_0(x), \phi_i(x)$ を複素数体 $\mathbb{C}(e_0, e_7)$ 上で定義し直す．ただし，e_7 は $e_7^2 = -e_0 \equiv -1$ を満足する新しい大域的な虚数単位であるが，e_0 とは可換である一方，e_i とは反可換であると仮定する (可換とすると，四元数場 (8.2a) の成分場を複素スカラー場にするだけで，何ら新しい結果は生まれない)．そして，(1.58a) の記号

$$e_{3+i} \equiv e_7 e_i = -e_i e_7 \tag{8.7}$$

を導入する．$e_i = e_i(x)$ が局所的に定義されたことを受けて，$e_{3+i} = e_{3+i}(x)$ も局所的である．このような意味で複素化された四元数場は

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e_0(\phi_0(x) + e_7\phi_7(x)) + e_i(x)(\phi_i(x) - e_7\phi_{3+i}(x)) \\ &= e_0\phi_0(x) + \sum_{A=1}^{6} e_A(x)\phi_A(x) + e_7\phi_7(x)\end{aligned} \tag{8.8}$$

とかき直せる．ここで，$\{e_0, e_1(x), \cdots, e_6(x), e_7\}$ は局所八元数 $\mathbb{O}_x$ を定義し，各時空点 x において，八元数代数を張る．単位元 e_0 と $e_0e_7 = e_7e_0 = e_7$ は時空点に依存しないとする．(8.8) をスピノル場に対して定義したものは，

$$\psi(x) = e_0\chi_0(x) + \sum_{A=1}^{6} e_A(x)\chi_A(x) + e_7\chi_7(x) \tag{8.9}$$

となる．ここで，四元数 Dirac 場 (7.1c) と同じように，すべての χ は反可換な 4 成分 Majorana 場で，スピノル添字 $\alpha = 1, 2, 3, 4$ を持つ．(8.9) を八元数 Dirac 場と呼ぶことにする．

以下見るように，八元数 Dirac 場にもとづいて，$SU(3)$ ゲージ理論 (QCD) が導かれる．$SU(3)$ ゲージ理論そのものは微分形式によって，たやすく定式化できる．その量子化と繰り込み理論はよく知られている．その意味からは，QCD (量子色力学) の運動学は容易に理解できるので，その量子論的動力学を詳細に調べることこそ本質的かつ重要ではある．それによってはじめて理論の予言と実験結果との比較検討が定量的になされ，仮定の吟味・理論の進化が達成できるからである．けれども，この節では，局所八元数 $\mathbb{O}_x$ を用いて $SU(3)$ ゲージ理論を導くことにより，物質の同じ階層に属すると仮定されるレプトンとクォークの (今のところ見られる) 顕著な違いを形式的にしろ探る．

まず，(8.9) を，八元数の基底 $\{e_\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,7}$ と可換な虚数単位 i を用いて，次のように分解する．

$$\psi(x) = \psi(x)\frac{e_0 + ie_7}{2} + \psi(x)\frac{e_0 - ie_7}{2} = \Psi(x) + \Psi^*(x)$$

$$\Psi(x) = \sqrt{2}\{u_0^*\psi^0(x) + u_i^*(x)\psi^i(x)\} \equiv \sqrt{2}\sum_{n=0}^{3} u_n^*\psi^n,$$

$$\Psi^*(x) = \sqrt{2}\{u_0\psi^{0\,*}(x) + u_i(x)\psi^{i\,*}(x)\} \equiv \sqrt{2}\sum_{n=0}^{3} u_n\psi^{n\,*}$$

$$\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_0 + i\chi_7), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_i + i\chi_{3+i})$$

$$\psi^{n\,*} = \psi^n \text{の複素共役} \quad (n = 0, 1, 2, 3) \tag{8.10}$$

ここで，セット $\{u_0, u_0^*, u_i, u_i^*\}_{i=1,2,3}$ は八元数のスプリット基底で，次式で定義される．[4),5)]

$$u_0 \equiv \frac{1}{2}(e_0 + ie_7), \qquad u_0^* \equiv \frac{1}{2}(e_0 - ie_7)$$

$$u_i \equiv e_i\frac{e_0 - ie_7}{2} = \frac{1}{2}(e_i + ie_{3+i}), \qquad u_i^* \equiv e_i\frac{e_0 + ie_7}{2} = \frac{1}{2}(e_i - ie_{3+i}) \tag{8.11a}$$

その積法則は (1.59b) から次のようになる．

$$\begin{aligned}
&u_0^2 = u_0, \quad u_0^{*\,2} = u_0^* \\
&u_0^* u_0 = u_0 u_0^* = 0 \\
&u_i u_0 = u_0^* u_i = u_0 u_i^* = u_i^* u_0^* = 0 \\
&u_0 u_i = u_i, \quad u_i u_0^* = u_i \\
&u_i^* u_0 = u_i^*, \quad u_0^* u_i^* = u_i^* \\
&u_i u_j = \varepsilon_{ijk} u_k^*, \quad u_i^* u_j^* = \varepsilon_{ijk} u_k \\
&u_i u_j^* = -\delta_{ij} u_0, \quad u_i^* u_j = -\delta_{ij} u_0^*
\end{aligned} \tag{8.11b}$$

局所八元数 $\mathbb{O}_x$ のスプリット基底としては，u_0, u_0^* は一定であるが，$u_i = u_i(x), u_i^* = u_i^*(x)$ は時空点に依存して定義されている．この仮定のもとで，局所代数 (8.11b) は次の局所変換のもとで不変である．

$$\begin{cases} u_0 \to u_0' = u_0 \\ u_0^* \to u_0^{*\prime} = u_0^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i(x) \to u_i'(x) = U_{ij}(x)u_j(x) \\ u_i^*(x) \to u_i^{*\prime}(x) = U_{ij}^*(x)u_j^*(x) = u_j^*(x)U_{ji}^\dagger(x) \end{cases} \tag{8.12a}$$

ただし $U(x) = (U_{ij}(x)) \in SU(3)$ である．この証明は局所四元数の場合と同

じであるが，念のため証明に必要な式のみ明示する．(8.11b) の最初の 5 行は $U(x)$ が何であっても成り立つ．U に対する制限は残り 2 行の式から生ずる．それらは，

$$
\begin{aligned}
u_i'u_j' &= U_{ik}U_{jl}u_k u_l = U_{ik}U_{jl}\varepsilon_{klm}u_m^* = \varepsilon_{ijk}u_k'^* = \varepsilon_{ijk}U_{kl}^*u_l^* \\
u_i^{*\prime}u_j^{*\prime} &= U_{ik}^*U_{jl}^*u_k^*u_l^* = U_{ik}^*U_{jl}^*\varepsilon_{klm}u_m = \varepsilon_{ijk}u_k' = \varepsilon_{ijk}U_{kl}u_l \\
u_i'u_j^{*\prime} &= U_{ik}U_{jl}^*u_k u_l^* = -\delta_{kl}U_{ik}U_{jl}^*u_0 = -\delta_{ij}u_0 \\
u_i^{*\prime}u_j' &= U_{ik}^*U_{jl}u_k^*u_l = -\delta_{kl}U_{ik}^*U_{jl}u_0^* = -\delta_{ij}u_0^*
\end{aligned}
\tag{8.12b}
$$

となるが，これから $U \in SU(3)$ が導かれる．従って，(8.10) の Ψ, Ψ^* は局所ゲージ変換

$$
\begin{cases}
\psi^0(x) \to \psi'^0(x) = \psi^0(x) \\
\psi^i(x) \to \psi'^i(x) = U_{ij}(x)\psi^j(x)
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\psi^{0*}(x) \to \psi'^{0*}(x) = \psi^{0*}(x) \\
\psi^{i*}(x) \to \psi'^{i*}(x) = U_{ij}^*(x)\psi^{j*}(x)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_0 \quad\ \to u_0' = u_0 \\
u_i(x) \to u_i'(x) = U_{ij}(x)u_j(x)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_0^* \quad\ \to u_0^{*\prime} = u_0^* \\
u_i^*(x) \to {u^*}'_i(x) = U_{ij}^*(x)u_j^*(x) = u_j^*(x)U_{ji}^\dagger(x)
\end{cases}
\tag{8.13}
$$

のもとで不変である．$\Psi(x)$ のゲージ不変性から，その成分場 $\psi^0(x)$ は $SU(3)$ 1 重項，$\psi^i(x)$ $(i=1,2,3)$ は $SU(3)$ 3 重項であることがわかる．

前節で，$SO(3)$ ゲージ理論を，四元数の結合法則を使わないで求めた手法を応用すれば，(大域的な e_7 を持つ) 局所八元数にもとづくゲージ理論は，ゲージ群 $SU(3)$ を持つことがわかる[6)]．例えば，ゲージ不変微分は

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mu u_0 = \nabla_\mu u_0^* = 0 \\
&\nabla_\mu u_i^*(x) = u_j^*(x)b_{\mu,\,ji}, \quad \nabla_\mu u_i(x) = -u_j(x)b_{\mu,\,ij} \\
&b_\mu = (b_{\mu,\,ij}) = \sum_{a=1}^{8}(-i)\left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{ij}b_\mu^a : \quad SU(3)\ \text{ゲージ場}
\end{aligned}
\tag{8.14a}
$$

となり (λ_a は Gell-Mann 行列[7)])，ゲージ場の強さは

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]u_i^*(x) = u_j^*(x)f_{\mu\nu,\,ji} \tag{8.14b}
$$

$$
f_{\mu\nu} = (f_{\mu\nu,\,ji}) = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu + [b_\mu, b_\nu] \tag{8.14c}
$$

で与えられる．また，$SU(3)$ の非可積分位相因子は

$$u_i^*(x) = u_j^*(y)U_{ji}(y,x) \tag{8.14d}$$

$$U(y,x) = (U_{ji}(y,x)) = L\exp\left(\int_y^x b_\mu(\xi)d\xi^\mu\right) \tag{8.14e}$$

となる．この $SU(3)$ を，Günaydin-Gürsey [4] に従って，標準模型のカラー $SU(3)$ に同定する．

ところが，分解 (8.10) には右から $e^{b\beta e_7}$ をかける自由度が残る (β はゲージ・パラメータであるが，当面，定数とする．また，b は実数である)．それは，今の場合必要となる (局所的な) スプリット八元数の基底の積法則が (8.11a) により，$e_7^2 = -1 \equiv -e_0$ を使って，

$$\{u_0, u_i(x), u_0^*, u_i^*(x)\}e_7 = \{-iu_0, iu_i(x), iu_0^*, -iu_i^*(x)\} \tag{8.15a}$$

であることからわかる．その結果，スピノル場は

$$\begin{aligned}\psi(x) \to \psi'(x) &= \psi(x)e^{+b\beta e_7}\\ &= \sqrt{2}\{u_0^*e^{+ib\beta}\psi^0(x) + u_i^*(x)e^{-ib\beta}\psi^i(x)\} + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{8.15b}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\Psi \to \Psi' &= \Psi e^{+b\beta e_7} = \sqrt{2}\{u_0^*e^{+ib\beta}\psi^0(x) + u_i^*(x)e^{-ib\beta}\psi^i(x)\}\\ \Psi^* \to \Psi^{*\prime} &= \Psi^* e^{+b\beta e_7} = \sqrt{2}\{u_0e^{-ib\beta}\psi^{0\,*}(x) + u_i(x)e^{+ib\beta}\psi^{i\,*}(x)\}\end{aligned} \tag{8.15c}$$

のような位相変換を受け，新しい $U(1)$ 電荷

$$\begin{cases}\psi^0 & \text{新しい } U(1) \text{ 電荷} = +b\\ \psi^i(i=1,2,3) & \text{新しい } U(1) \text{ 電荷} = -b\end{cases} \tag{8.15d}$$

を持つ．この変換のもとで不変な物質場のラグランジアンは，(1.60e) を応用すれば，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{matter}} &= -\frac{1}{2}\text{Re}\,[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi] + (\text{質量項})\\ &= -\frac{1}{2}\text{Re}\,[\overline{(\Psi^* + \Psi)}\gamma^\mu\nabla_\mu(\Psi^* + \Psi)] + (\text{質量項})\\ &= -\frac{1}{2}\text{Re}\,[\overline{\Psi^*}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi] - \frac{1}{2}\text{Re}\,[\overline{\Psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi^*] + (\text{質量項})\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{\psi}^0\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^0 - \bar{\psi}^i\gamma^\mu(\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu + b_\mu)_{ij}\psi^j + (\text{質量項}) \tag{8.16a}$$

となる．ここで，Majorana スピノルの性質 $\bar{\chi}_0\gamma^\mu\chi_7 = -\bar{\chi}_7\gamma^\mu\chi, \bar{\chi}_0\gamma^\mu\partial_\mu\chi_0 = -(\partial_\mu\bar{\chi}_0)\gamma^\mu\chi_0$ などを用いた．また，$D_\mu = \partial_\mu + b_\mu$ は $SU(3)$ ゲージ共変微分であり，第 1 行にある八元数 Dirac 場 ψ のバー $\bar{\psi}$ は八元数共役と共に，Majorana スピノルの Dirac 共役をも意味する．

$$\bar{\psi}(x) = e_0\bar{\chi}_0(x) - \sum_{A=1}^{6} e_A\bar{\chi}_A(x) - e_7\bar{\chi}_7(x) \tag{8.16b}$$

従って，

$$\overline{\psi^{0\,*}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_0 - i\bar{\chi}_7) \equiv \bar{\psi}^0$$
$$\overline{\psi^{i\,*}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_i - i\bar{\chi}_{3+i}) \equiv \bar{\psi}^i \tag{8.16c}$$

が Dirac 場 ψ^n $(n = 0, 1, 2, 3)$ の Dirac 共役になるのは，前章 7.2 節の四元数 Dirac 場のときと同じである．それに対して，

$$\tilde{\psi}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_0 + i\bar{\chi}_7)$$
$$\tilde{\psi}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\chi}_i + i\bar{\chi}_{3+i}) \tag{8.16d}$$

とおく．位相変換

$$\psi^0 \to \psi'^0 = e^{ib\beta}\psi^0, \quad \psi^i \to \psi'^i = e^{-ib\beta}\psi^i \tag{8.16e}$$

は

$$\bar{\psi}^0 \to \bar{\psi}'^0 = e^{-ib\beta}\bar{\psi}^0, \quad \bar{\psi}^i \to \bar{\psi}'^i = e^{ib\beta}\bar{\psi}^i$$
$$\tilde{\psi}^0 \to \tilde{\psi}'^0 = e^{ib\beta}\tilde{\psi}^0, \quad \tilde{\psi}^i \to \tilde{\psi}'^i = e^{-ib\beta}\tilde{\psi}^i \tag{8.16f}$$

に導く．

(8.16a) の第 2 行目から第 3・4 行目に移行する際，(8.11b) および (8.14a) を利用した．$e_A = e_A(x)$ $(A = 1, \cdots, 6)$ は局所的だが，e_7 を大域的と仮定した時点で，レプトンと同定される ψ^0 とクォークと同定される $\psi^{i=1,2,3}$ に区別を持ち込んだことになっている．すなわち，レプトンとクォークの現在見られる異

質性を八元数を用いて形式的にしろ見出そうとする論理は，最初から仮定しているのではないかとの単純な疑問が生ずる．しかしながら，その違いがカラー $SU(3)$ の 1 重項か 3 重項かの違いだけでなく，保存される新しい $U(1)$ 電荷の値 (8.15d) にも反映されている点を強調したい (ただし，$b \neq 0$ とする)．もし，$e_7 = e_7(x)$ も局所的に定義されていると仮定したらどうなるだろうか．カラー $SU(3)$ の 1 重項か 3 重項かの違いはもちろん保持されるが，新しい $U(1)$ 電荷の値 (8.15d) も変化しない．ただ，新しい $U(1)$ 不変性が成り立たなくなる．これを見る為に，(8.15a) は e_7 が局所的に定義されていると仮定しても，次の修正をするだけで成り立つことに注意する．

$$\{u_0(x), u_i(x), u_0^*(x), u_i^*(x)\}e_7(x) = \{-iu_0(x), iu_i(x), iu_0^*(x), -iu_i^*(x)\} \tag{8.17a}$$

そのとき，スピノル場は

$$\begin{aligned}\psi(x) \to \psi'(x) &= \psi(x)e^{+b\beta e_7(x)} \\ &= \sqrt{2}\{u_0^*(x)e^{+ib\beta}\psi^0(x) + u_i^*(x)e^{-ib\beta}\psi^i(x)\} + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{8.17b}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\Psi \to \Psi' &= \Psi e^{+b\beta e_7(x)} = \sqrt{2}\{u_0^*(x)e^{+ib\beta}\psi^0(x) + u_i^*(x)e^{-ib\beta}\psi^i(x)\} \\ \Psi^* \to \Psi^{*\prime} &= \Psi^* e^{+b\beta e_7(x)} = \sqrt{2}\{u_0(x)e^{-ib\beta}\psi^{0\,*}(x) + u_i(x)e^{+ib\beta}\psi^{i\,*}(x)\}\end{aligned} \tag{8.17c}$$

という位相変換を受ける．指数関数 $e^{\pm ib\beta}$ は，(8.15b,c) と同じく，単なる位相を与えるだけなので，新しい $U(1)$ 電荷は (8.15d) で与えられるものと変わらない．けれども，ゲージ不変微分 (8.14a) が自明でない変更をうける．

その理由は殆ど明らかである．$e_7 = e_7(x)$ まで局所的にすると，八元数の基底は各時空点 x で積法則 (1.59b) に従う，すなわち，

$$e_A(x)e_B(x) = -\delta_{AB}e_0 + a_{ABC}e_C(x), \quad (A, B, C = 1, \cdots, 7) \tag{8.18a}$$

を仮定することになるが，この積法則は変換

$$\begin{aligned}&e_A(x) \to e'_A(x) = g_{AB}(x)e_B(x) \\ &g_{AC}(x)g_{BC}(x) = \delta_{AB}\end{aligned}$$

$$a_{CDE}g_{AC}(x)g_{BD}(x) = a_{ABC}g_{CE}(x), \quad (A,B,C,D,E = 1,\cdots,7) \tag{8.18b}$$

のもとで不変である．この条件は $g = (g_{AB}) \in G_2$ を意味する．すなわち，$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = G_2$ (これについては，付録 A を見よ)．ところで，G_2 のゲージ場は随伴表現 $\underline{\mathbf{14}}$ に属する．その $SU(3)$ 分解は $\underline{\mathbf{14}} = \underline{\mathbf{8}} + \underline{\mathbf{3}} + \underline{\mathbf{3}}^*$ である．それに従って，G_2 ゲージ場の局所 $SU(3)$ 変換則がわかる．それらを，(8.14a) で出てきた $SU(3)$ ゲージ場 b^a_μ $(a = 1,\cdots,8)$ とともに，$SU(3)$ の表現 $\underline{\mathbf{3}}$ および $\underline{\mathbf{3}}^*$ に属するベクトル場 β^i_μ, $\beta^{i\,\dagger}_\mu$ $(i = 1,2,3)$ とおく．これらは $u_i = u_i(x), u^*_i = u^*_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ に加え，$u_0 = u_0(x), u^*_0 = u^*_0(x)$ を仮定した (8.11b) のゲージ不変微分から求まる (この場合のゲージ変換は (8.12a) である)．導き方の詳細は付録 D を参照されたい．結果は，引数の x を省略して，

$$\nabla_\mu u^*_0 = -u^*_i\beta^i_\mu + u_i\beta^{i\,\dagger}_\mu \tag{8.19a}$$

$$\nabla_\mu u_0 = -u_i\beta^{i\,\dagger}_\mu + u^*_i\beta^i_\mu \tag{8.19b}$$

$$\nabla_\mu u^*_i = -u_0\beta^{i\,\dagger}_\mu + u^*_0\beta^{i\,\dagger}_\mu - \varepsilon_{ijk}u_j\beta^k_\mu + u^*_j(b_{\mu,ji}) \tag{8.19c}$$

$$\nabla_\mu u_i = -u^*_0\beta^i_\mu + u_0\beta^i_\mu - \varepsilon_{ijk}u^*_j\beta^{k\,\dagger}_\mu - u_j(b_{\mu,ij}) \tag{8.19d}$$

となる．

さて，このとき，

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi^*}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi] - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi^*] \\
&= -\frac{1}{2}[\bar{\psi}^0\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^0 + \bar{\psi}^i\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^i] \\
&\quad - [\bar{\psi}^0\gamma^\mu\beta^{i\,\dagger}_\mu\psi^i - \bar{\psi}^i\gamma^\mu\beta^i_\mu\psi^0 + \bar{\psi}^i\gamma_\mu b_{\mu,ij}\psi^j]
\end{aligned} \tag{8.20a}$$

が成り立つ．すると，(8.15a,b,c) の $U(1)$ 電荷の保存則から，(8.15d) に注意して，

$$\begin{cases}
\beta^i_\mu & \text{新しい } U(1) \text{ 電荷} = -2b, \quad (i = 1,2,3) \\
\beta^{i\,\dagger}_\mu & \text{新しい } U(1) \text{ 電荷} = +2b, \quad (i = 1,2,3) \\
b^a_\mu & \text{新しい } U(1) \text{ 電荷} = \quad 0 \quad (a = 1,\cdots,8)
\end{cases} \tag{8.20b}$$

となる．ところが，

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi] = \frac{1}{2}[\tilde{\psi}^0\gamma^\mu\beta^{i\,\dagger}_\mu\psi^i - \tilde{\psi}^i\gamma^\mu\beta^{i\,\dagger}_\mu\psi^0 + \varepsilon_{ijk}\tilde{\psi}^i\gamma^\mu\beta^k_\mu\psi^j]$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\overline{\Psi^*}\gamma^\mu\nabla_\mu\Psi^*] = \frac{1}{2}[\bar{\psi}^0\gamma^\mu\beta^i_\mu\psi^{i\,*} - \bar{\psi}^i\gamma^\mu\beta^i_\mu\psi^{0\,*} + \varepsilon_{ijk}\bar{\psi}^i\gamma^\mu\beta^{k\,\dagger}_\mu\psi^{j\,*}] \tag{8.20c}$$

は (8.15d)，(8.20b) の新しい $U(1)$ 電荷を保存しない．これは，ラグランジアンの運動エネルギー項 $-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\nabla_\mu\psi(x)]$ は変換 (8.15b) のもとでは不変であるが，変換 (8.17b) のもとでは最早不変に留まらないことからもわかる．それは，$\nabla_\mu(\psi(x)e^{b\beta e_7}) = (\nabla_\mu\psi(x))e^{b\beta e_7}$ ではあるが，$\nabla_\mu(\psi(x)e^{b\beta e_7(x)}) \neq (\nabla_\mu\psi(x))e^{b\beta e_7(x)}$ なので．それ故，(8.17b) のもとで不変なラグランジアンを構成するには，$\beta^i_\mu = \beta^{i\,\dagger}_\mu = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ とおかねばならない (G_2 ゲージ理論の立場からすると，Higgs 機構により，β^i_μ に質量を持たせ，その質量を無限に大きくする極限を取って，スペクトルから β^i_μ を取り去ることに相当する)．このようにして，当然のことであるが，新しい対称性として $U(1)$ 変換 (8.15b,c) のもとでの不変性を要求することは，e_7 は x に依存しない，ゆえに，$u_0(x) = u_0, u_0^*(x) = u_0^*$ は一定であることを仮定することと同等であり，e_7 を特別扱いした八元数 Dirac 場 (8.9) から出発すると，レプトンとクォークは $SU(3)$ の属する表現が違うだけでなく，新しい $U(1)$ 電荷も違うことになる ($b \neq 0$ として)．逆に，レプトンとクォークの転移を引き起こす (巨大な質量を持った) G_2 ゲージ場 β^i_μ が存在すれば，新しい $U(1)$ 不変性が壊れて，バリオン数の非保存に導く大統一理論の精神に近づく．

(8.15b,c,d) の $U(1)$ 変換はカイラルではないので，ゲージ化できる．それで，(8.15b,c) の $\beta = \beta(x)$ とおく．すると新しいゲージ場が必要になる．今，恣意的ではあるが，簡単のため，四元数場の変換則 (7.4a,b) に出てきたゲージ・パラメータ $\alpha(x)$ を用いて，$\beta(x) = \alpha(x)$ とおく (ゲージ結合定数も等しい)．暫定的にこの恣意的な仮定をすると，新しいゲージ場は (7.6e) に従って変換する $C_\mu(x)$ に他ならない．そして，レプトンは新しい $U(1)$ 電荷 $+b$ を担い，クォークは $-b$ を持つようになる．それ故，新しい $U(1)$ ゲージ不変性から，(7.6e) に従うゲージ場 C_μ を利用して，(8.16a) に現れている偏微分のおき換え $\partial_\mu \to \partial_\mu \mp ibC_\mu$，ただし，$-$ はレプトン ψ^0, $+$ はクォーク $\psi^{i=1,2,3}$，が必要になる．第 7 章の $U(1)$ 電荷は量子数 $B - L$ に等しいのであるが，四元数起源の $U(1)$ 電荷はクォーク・レプトン共通に a という値を持ち，八元数起源の $U(1)$ 電荷

$\pm b$ と融合された $U(1)$ 電荷は次の値を持つ.

$$\psi^0\ (\text{レプトン}):\ a+b \tag{8.21a}$$

$$\psi^i\ (\text{クォーク}):\ a-b \tag{8.21b}$$

以上を前章の結果と合わせてまとめると，次のような描像が得られる．クォーク・レプトンの同質性を示す《香り》の自由度は四元数で，クォーク・レプトンの異質性を示す《色》の自由度を八元数で記述すれば，四元数 × 八元数という代数 (直積多元環) にもとづく非可換ゲージ群は $SU(3)\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)$ で与えられる．ただし，$U(1)$ は四元数起源のものと八元数起源のものが融合した結果である (と仮定した．この恣意的仮定は一般論では除くべきである)．(第 1 世代の) クォーク・レプトンの表現を，第 7 章の結果と合わせれば，$i=1,2,3$ をカラーの自由度に同定して，

$$\psi_L^{i=1,2,3}=\begin{pmatrix}u^{i=1,2,3}\\ d^{i=1,2,3}\end{pmatrix}_L\cdots\ (3,2,1,a-b)$$

$$\psi_R^{i=1,2,3}=\begin{pmatrix}u^{i=1,2,3}\\ d^{i=1,2,3}\end{pmatrix}_R\cdots\ (3,1,2,a-b)$$

$$\psi_L^{0}=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L\cdots\cdots\cdots(1,2,1,a+b)$$

$$\psi_R^{0}=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_R\cdots\cdots\cdots(1,1,2,a+b) \tag{8.21c}$$

となる．ただし，最後の列の括弧内は，ゲージ群 $SU(3)\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)$ の表現を表し，$U(1)$ 電荷は $a+b=-1, a-b=1/3$ である．そのうち，a は四元数に，$\pm b$ は八元数に起源を持つ.

8.3　複素スカラー積を持つ八元数 Hilbert 空間

前節では，QCD を八元数 Dirac 場のゲージ理論として導いた．QCD はシンプルであり，スマートである (具体的な計算は複雑であるが)．その存在理由を八元数に求めることは，複雑な代数用語を用いて，単なる言葉遊びをやっているに

過ぎないと酷評する人がいないでもない．けれども，八元数を用いることは，単に,《色》の自由度に関するクォーク・レプトンの相違の起源を調べるだけではなく，クォークの閉じこめについての代数的なアプローチにもつながる．この節では，Günaydin[8]による八元数 Hilbert 空間の構成を紹介し，クォークの閉じこめの代数的側面を調べる．場の理論における代数的アプローチ一般については，Gürsey-Tze の本 [9]を見よ．

Hilbert 空間は内積の定義された線形ベクトル空間で，内積から導かれるノルムに関して完備なものを言う．その係数体は，$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ が考えられ，それぞれ実 Hilbert 空間，複素 Hilbert 空間，四元数 Hilbert 空間と呼ぶ．普通の量子力学では，複素 Hilbert 空間を取り扱う．非可換で非結合的な八元数は体をなさないので，それをスカラーとみなす八元数 Hilbert 空間はスカラーとベクトルの積について，右移動と左移動の違いだけでなく，結合の順序についても指定しなければならない．その上，非結合的な状態は観測可能ではない．しかしながら，Günaydin-Gürsey[4] によれば，八元数 Hilbert 空間は可換で結合的な状態ベクトルの空間と非可換で非結合的な状態ベクトルの空間に直和分解でき，クォークの閉じ込めと密接な関係を持つという．これは，基本的には，状態ベクトルは八元数であるが，空間の幾何学を決める内積は複素数に値を取るという考えに基づく．[4] それ故，はじめに，八元数 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathbb{O}}$ の公理を述べることから始めよう．Goldstine-Horwitz[10]に従ってその公理をかき下すと，次のようになる (e_A $(A = 1, \cdots 7)$ は大域的とする)．

1) ベクトルの線形性

$$f, g \in \mathcal{H}_{\mathbb{O}} \longrightarrow f + g = g + f \in \mathcal{H}_{\mathbb{O}}, \quad (f+g)+h = f+(g+h) \in \mathcal{H}_{\mathbb{O}}$$
$$(a+b)f = af + bf, \quad a(f+g) = af + ag, \ a, b \in \mathbb{O}$$
$$a(af) = (a^2)f, \ a(a^{-1}f) = f, \ a \in \mathbb{O}$$
$$a(bf) = (ab)f, \ a \text{ または } b \text{ は実数} \tag{8.22a}$$

このとき，$a, b \in \mathbb{O}, f \in \mathcal{H}_{\mathbb{O}}$ として，

$$a(\bar{a}f) = |a|^2 f$$
$$a(bf) + b(af) = (ab+ba)f$$

$$
\begin{aligned}
a(\bar{b}f) + b(\bar{a}f) &= (a\bar{b} + b\bar{a})f \\
a^n(af) = a(a^n f) &= a^{n+1}f, \quad (n \text{ は任意の整数}) \\
a(b(af)) &= (aba)f
\end{aligned} \tag{8.22b}
$$

が導ける．

2)　内積 $\langle f, g\rangle \in \mathbb{O}$, $f, g \in \mathcal{H}_{\mathbb{O}}$ の性質

$$
\begin{aligned}
\langle f+g, h\rangle &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle \\
\overline{\langle f, g\rangle} &= \langle g, f\rangle \\
\langle f, f\rangle &\geqq 0 \qquad (= 0 \text{ は } f = 0 \text{ のときのみ}) \\
\langle \alpha f, f\rangle &= \alpha\langle f, f\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Re}\,[\langle af, g\rangle] &= \mathrm{Re}\,[a\langle f, g\rangle] \\
\langle af, f\rangle &= a\langle f, f\rangle
\end{aligned} \tag{8.22c}
$$

完備性はノルム $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ に関して定義する（$\langle f, g\rangle$ は一般に八元数であるが，$\langle f, f\rangle$ は実数である）．

内積には階層がある．1 次元の場合を考えて

$$
f = e_0 f_0 + \sum_{A=1}^{7} e_A f_A, \quad g = e_0 g_0 + \sum_{A=1}^{7} e_A g_A \tag{8.23a}
$$

とおく．八元数に値を持つ内積は

$$
\langle f, g\rangle = \bar{f}g = e_0 \sum_{\alpha=0}^{7} f_\alpha g_\alpha + \sum_{A=1}^{7} e_A(f_0 g_A - f_A g_0) - \sum_{A,B,C=1}^{7} a_{ABC} f_A g_B e_C \tag{8.23b}
$$

で与えられる．ここで，a_{ABC} は (1.59b) で定義された，添字について完全反対称な数で，0 か ± 1 の値を取る．内積 (8.23b) の不変群は離散群 $\{\pm 1\}$ である．この実部のみを取ったものを

$$
\langle f, g\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}(\bar{f}g + \bar{g}f) = e_0 \sum_{\alpha=0}^{7} f_\alpha g_\alpha \tag{8.23c}
$$

とかく．この場合の不変群は，$SO(8)$ である．これは，八元数のノルムの不変

群に他ならない．

(8.23a) はまた，四元数を用いて，Cayley-Dickson 型 (1.55a) に

$$
\begin{aligned}
&f = q + e_7 Q, \quad q = f_0 + e_i f_i, \quad Q = f_7 + e_i f_{3+i} \in \mathbb{H} \\
&g = p + e_7 P, \quad p = g_0 + e_i g_i, \quad P = g_7 + e_i g_{3+i} \in \mathbb{H}
\end{aligned} \tag{8.23d}
$$

とかくこともできる．すると，(8.23b) は再び Cayley-Dickson 型 (1.56a)

$$
\langle f, g \rangle = \bar{q}p + P\bar{Q} + e_7(qP - pQ) \tag{8.23e}
$$

になる．ここで右辺第 1 項のみを取ったものを

$$
\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}} = \bar{q}p + P\bar{Q} \tag{8.23f}
$$

とおき，四元数に値を持つ内積という．この内積の不変群は $(q,p) \to (U_1 q, U_1 p), (Q, P) \to (QU_2, PU_2)$, $U_{1,2} \in SL(1, \mathbb{H})$ からなる $SU(2) \times SU(2)$ である．(8.23e) で 2 つの四元数の実部を取ったものは

$$
\begin{aligned}
(f, g) \equiv \langle f, g \rangle_{\mathbb{C}} &= \mathrm{Re}\,[\bar{q}p + P\bar{Q}] + e_7\{\mathrm{Re}\,(qP - pQ)\} \\
&= (f_0 g_0 + f_i g_i) + (g_7 f_7 + g_{3+i} f_{3+i}) \\
&\quad + e_7\Big((f_0 g_7 - f_i g_{3+i}) + (-g_0 f_7 + g_i f_{3+i})\Big)
\end{aligned} \tag{8.24a}
$$

となり，複素数 $\mathbb{C}(e_0, e_7)$ に値を持つ内積という．複素スカラー積 (8.24a) を持つ八元数 Hilbert 空間を $\mathfrak{H}$ とかく．

(8.23a) がまた $\mathbb{C}(e_0, e_7)$ に値を持つ成分を用いて，

$$
\begin{aligned}
&f = e_0 F_0 + e_i F_i, \quad F_0 = f_0 + e_7 f_7, \quad F_i = f_i - e_7 f_{3+i} \\
&g = e_0 G_0 + e_i G_i, \quad G_0 = g_0 + e_7 g_7, \quad G_i = g_i - e_7 g_{3+i}
\end{aligned} \tag{8.24b}
$$

とかけることに注意すると，複素内積 (8.24a) は

$$
(f, g) = F_0^* G_0 + F_i^* G_i \equiv (F_0, G_0) + (F_i, G_i), \tag{8.24c}
$$

とも表せ，不変群 $U(4)$ を持つ．$*$ は複素共役 $e_7 \to -e_7$ を意味する．不変群 $U(4)$ の部分群に $U(3)$ がある．それは次の変換で特徴づけられる．

$$
\begin{cases}
F_0 \to F_0' = F_0, \quad F_i \to F_i' = U_{ij} F_j \\
G_0 \to G_0' = G_0, \quad G_i \to G_i' = U_{ij} G_j
\end{cases} \tag{8.24d}
$$

ただし，$U=(U_{ij})$ は複素数体 $\mathbb{C}(e_0,e_7)$ 上で定義された $U(3)$ の元である (一方，(8.12)，(8.13) の U は $\mathbb{C}(1,i)$ 上で定義されている)．これを (8.24b) に代入すれば，

$$f \to f' = e_0F_0' + e_iF_i' = e_0F_0 + e_i(U_{ij}F_j) = e_0F_0 + (e_iU_{ij})F_j \tag{8.24e}$$

が得られる．つまり，ベクトルの成分の変換は四元数の基底 $\{e_1,e_2,e_3\}$ の変換に (位相因子を除いて) 等価になる．この意味は後ほど明確にする．複素内積 (8.24c) は次の性質をもつ．

$$\begin{cases} (f,gz) = z(f,g) = (f,g)z \\ (fz,g) = z^*(f,g) = (f,g)z^* \qquad z \in \mathbb{C}(e_0,e_7) \\ (z^*f,g) = (f,zg) \end{cases} \tag{8.24f}$$

しかし，$(zf,g) \neq z^*(f,g), (f,zg) \neq z(f,g)$ である．これらの性質は，$fz = e_0(F_0z) + e_i(F_iz)$ ではあるが，$zf = e_0(zF_0) + e_i(z^*F_i)$ となることに注意すればよい．

内積 $\langle f,g\rangle$ を持つ八元数 Hilbert 空間に作用する演算子は，実数係数の線形性のみを要求できる．その場合のエルミート共役演算子も定義できる．[10) しかしながら，複素内積 (f,g) が定義された八元数 Hilbert 空間では次式により $\mathbb{C}(e_0,e_7)$ 上の線形演算子 A を定義できる．

$$(Af)z = A(fz), \quad z \in \mathbb{C}(e_0,e_7) \tag{8.25a}$$

このような演算子は，A_0, A_7 を実線形な演算子として，

$$A = A_0e_0 + e_7A_7 \tag{8.25b}$$

とかける．これは $(e_7e_A)e_7 = e_7(e_Ae_7)$, $A=1,2,\cdots,7$ ではあるが，例えば，$(e_1e_2)e_7 \neq e_1(e_2e_7)$ に注意すればよい．それ故，そのエルミート共役 $A^\dagger$ は (8.24f) 最後の式から，

$$(A^\dagger f,g) = (f,Ag) \tag{8.25c}$$

によって定義できる．オブザーバブル O は $(Of,g) = (f,Og)$ を満たすが，(8.25b) の形にはかけているので，状態ベクトル $f = e_0F_0 + e_iF_i$ の成分 F_0 と F_i は結ばない．ベクトルの積を取るときは，基底についての代数関係 $e_ie_j =$

$-\delta_{ij}e_0+\varepsilon_{ijk}e_k$ は保持するので，$\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}_L=\{e_0F_0\}$ と $\mathfrak{H}_T=\{e_iF_i\}$ の直和に分解できる．

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_L\oplus\mathfrak{H}_T \tag{8.26}$$

Günaydin-Gürsey [4] に従い，直和成分 $\mathfrak{H}_L$ を縦成分，$\mathfrak{H}_T$ を横成分と呼ぶ．

ところで，e_i $(i=1,2,3)$ に対する変換 (8.24e) を $SU(3)$ に制限したものは，e_7 を不変に保つ八元数の自己同型群と見なせる[11]．従って，八元数 Hilbert 空間の代数関係と内積は $\mathbb{C}(e_0,e_7)$ 上で定義された $SU(3)$ のもとで不変である．e_7 を不変に保つ自己同型群を $\mathbb{C}(e_0,e_7)$ 上で求めるには次のようにする．[8]

大域的なスプリット基底に対する自己同型変換 (8.12a) は

$$\begin{cases} u_0 \longrightarrow u_0'=u_0, \quad u_i\longrightarrow u_i'=U_{ij}(-i)u_j \\ u_0^* \longrightarrow u_0^{*\prime}=u_0^*, \quad u_i^*\longrightarrow u_i^{*\prime}=U_{ij}(i)u_j^* \end{cases} \tag{8.27a}$$

とかける．ただし，$U_{ij}(i)$ は $U_{ij}(-i)$ の複素共役で $U=(U_{ij}(-i))\in SU(3)$ とした．スプリット八元数の基底の積法則 $e_7u_i=-iu_i, e_7u_i^*=iu_i^*$ を使うと，この式は

$$\begin{cases} u_i \longrightarrow u_i'=\dfrac{1}{2}(e_0+ie_7)e_i'=U_{ij}(e_7)u_j=\dfrac{1}{2}(e_0+ie_7)U_{ij}(e_7)e_j \\ u_i^* \longrightarrow u_i^{*\prime}=\dfrac{1}{2}(e_0-ie_7)e_i'=U_{ij}(e_7)u_j^*=\dfrac{1}{2}(e_0-ie_7)U_{ij}(e_7)e_j \end{cases} \tag{8.27b}$$

となる．従って，e_7 を不変に保つ $\mathbb{O}$ の自己同型群は

$$e_i\longrightarrow e_i'=U_{ij}(e_7)e_j=e_jU_{ji}^T(-e_7) \tag{8.27c}$$

のように $\mathbb{C}(e_0,e_7)$ 上で定義された $SU(3)$ である．[8] (8.27a,b) を比べて $U_{ij}(e_7)=U_{ij}(-i)\equiv U_{ij}$．ゆえに，$U=(U_{ij})$ のエルミート共役は $U^\dagger=U^T(-e_7)$ となる．

このようにして，複素内積の不変群の部分群 $SU(3)$ は e_7 を不変に保つ八元数の自己同型群でもある．それ故，複素内積は厳密な $SU(3)$ 対称性を持つ．直和分解 (8.26) は $\mathfrak{H}_L$ が $SU(3)$ シングレット (e_0 方向の複素状態ベクトル) のみを含み，$\mathfrak{H}_T$ が $SU(3)$ 3 重項 (または反 3 重項) ($e_{1,2,3}$ 方向の複素状態ベクトル) のみを含むことを示す．$\mathfrak{H}_L$ は可換で結合的な状態ベクトルで張られ，通常の量子力学の法則が成り立つと考えられる．レプトンは $SU(3)$ シングレットなので，明らかに $\mathfrak{H}_L$ に属する．それで，レプトンを外した，八元数 Dirac 場

$$q_\alpha(x) = e_i(x)\psi^i_\alpha(x), \quad \psi^i \equiv \chi_i - e_7\chi_{3+i}\ (\alpha \text{ は略}) \tag{8.28}$$

を八元数クォーク場と呼び，成分場 ψ^i_α は普通の意味の生成消滅演算子を含むとする．ただし，添字 α はスピンの他にユニタリスピンの添字も表すとする．このように，カラー $SU(3)$ 3 重項のクォークは $\mathfrak{H}_T$ に属する．$\mathfrak{H}_T$ の状態ベクトルは非可換・非結合的なので，観測可能ではないと考えられる．[4),8),12)]けれども，クォーク多体系としてのハドロンはすべて $SU(3)$ シングレットなので，$\mathfrak{H}_L$ に属す必要がある．

この構成法を Günaydin[8)] に従って以下に示すが，Günaydin と異なる点は，QCD を八元数 Dirac 場から導いたので，ハドロンに対する QCD 紐模型に類似の描像が得られることにある．$\mathfrak{H}$ の状態ベクトルは左から (実) 八元数を作用させることが定義されているので，$\mathfrak{H}_T$ に属する状態ベクトルから，$\mathfrak{H}_L$ に属する状態ベクトルを作るために，次のような新しい積を定義する．

$$X \circ Y = \frac{1}{2}[(XY)e_7 + X(Ye_7)] \tag{8.29a}$$

$$X * Y = \frac{1}{2}[(XY)e_7 - X(Ye_7)] \tag{8.29b}$$

ここで，X, Y は一般に八元数であるが，(8.28) のような場の演算子をも含む．さて，八元数クォーク場の定義に現れる局所八元数の基準点を O として，$e_i = e_i(O)$ とおく．点 O はどこにとってもいい．このとき，八元数クォーク場は

$$q(x) = e_j U_{ji}(O,x)\psi^i(x) = U^*_{ji}(O,x)\psi^{i\,*}(x)e_j, \tag{8.30}$$

とかける．* は $e_7 \to -e_7$ を意味する．とくに，(8.14e) の $U_{ji}(O,x) = U_{ji}(O,x;-i) = U_{ji}(O,x;e_7)$ とかいたとき，$U^*_{ji}(O,x) = U_{ji}(O,x;-e_7)$ である．従って，

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) \circ q^*_\beta(y) &= -(U_{ji}(O,x)\psi^i_\alpha(x))(U^*_{jk}(O,y)\psi^{k\,*}_\beta(y))e_7 \\ &= -\psi^i_\alpha(x)U_{ji}(O,x)U^\dagger_{kj}(O,y)\psi^{k\,*}_\beta(y)e_7 \\ &= -\psi^i_\alpha(x)U^\dagger_{kj}(O,y)U_{ji}(O,x)\psi^{k\,*}_\beta(y)e_7 \\ &= -\psi^i_\alpha(x)U_{kj}(y,O)U_{ji}(O,x)\psi^{k\,*}_\beta(y)e_7 \\ &= -\psi_\alpha(x)U^T(y,x)\psi^*_\beta(y)e_7 \end{aligned} \tag{8.31a}$$

$$[q_\alpha^*(x) * q_\beta^*(y)] \circ q_\gamma^*(z) = -\varepsilon_{ijk} U_{il}(O,x)\psi_\alpha^l(x) U_{jm}(O,y)\psi_\beta^m(y) U_{jn}(O,z)\psi_\gamma^n(z) \tag{8.31b}$$

が得られる．なお，(8.31a) を求める際，

$$U^\dagger(O,y) = U^{-1}(O,y) = U(y,O) \tag{8.31c}$$

を用いた．これは定義 (8.14e) から導ける．また，Dirac 行列の Majorana 表示では，Dirac スピノルの複素共役 (エルミート共役) が荷電共役スピノルに等しい．ゆえに，(8.31a) はメソン $M = (q\bar{q})$ の演算子と解釈でき，(8.31b) はバリオン $B = (qqq)$ の演算子と解釈できる．

<u>(8.31) の証明</u>

(8.29) において，八元数 X, Y を一般に $X = \alpha_i e_i, \alpha_i = \alpha_0 e_0 + \alpha_7 e_7, Y = \beta_j e_j, \beta_j = \beta_0 e_0 + \beta_7 e_7$ とおける ($\alpha_{0,7}, \beta_{0,7}$ に付くべき添字 i, j は省略)．ゆえに，

$$\begin{aligned}
(XY)e_7 &= \Big[((\alpha_0 e_0 + \alpha_7 e_7)e_i)((\beta_0 e_0 + \beta_7 e_7)e_j)\Big] e_7 \\
&= \Big[(\alpha_0 e_i + \alpha_7 e_{3+i})(\beta_0 e_j + \beta_7 e_{3+j})\Big] e_7 \\
&= \alpha_0\beta_0(e_i e_j)e_7 + \alpha_0\beta_7(e_i e_{3+j})e_7 \\
&\quad + \alpha_7\beta_0(e_{3+i}e_j)e_7 + \alpha_7\beta_7(e_{3+i}e_{3+j})e_7 \\
X(Ye_7) &= (\alpha_0 e_i + \alpha_7 e_{3+i})((\beta_0 e_j + \beta_7 e_{3+j})e_7) \\
&= \alpha_0\beta_0 e_i(e_j e_7) + \alpha_0\beta_7 e_i(e_{3+j}e_7) \\
&\quad + \alpha_7\beta_0 e_{3+i}(e_j e_7) + \alpha_7\beta_7 e_{3+i}(e_{3+j}e_7)
\end{aligned} \tag{8.32a}$$

を得る．これから，

$$X \circ Y = -(\alpha_i \beta_i^*)e_7 \tag{8.32b}$$

$$X * Y = -\varepsilon_{ijk}(\alpha_i^* \beta_j^*)e_{3+k} \tag{8.32c}$$

および，$Z = \gamma_l e_l$ とおいて，

$$(X * Y) \circ Z = -\varepsilon_{ijk}((\alpha_i^*\beta_j^*)e_{3+k}) \circ (\gamma_l e_l) = -\varepsilon_{ijk}(\alpha_i^*\beta_j^*\gamma_k^*) \tag{8.32d}$$

が導かれる．(8.32a) から (8.32b,c,d) を導く際，八元数の基底の間の関係式

$$\begin{aligned}
(e_i e_j)e_7 + e_i(e_j e_7) &= -\delta_{ij}e_7 + \varepsilon_{ijk}e_k e_7 + e_i(-e_{3+j}) \\
&= -\delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k} - \delta_{ij}e_7 + \varepsilon_{ijk}e_{3+k} = -2\delta_{ij}e_7
\end{aligned} \tag{8.33a}$$

$$(e_i e_j)e_7 - e_i(e_j e_7) = -2\varepsilon_{ijk}e_{3+k} \tag{8.33b}$$

$$(e_i e_{3+j})e_7 + e_i(e_{3+j}e_7) = (\delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k})e_7 + e_i e_j$$

$$= -\delta_{ij}e_0 - \varepsilon_{ijk}e_k - \delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k = -2\delta_{ij}e_0 \tag{8.33c}$$

$$(e_ie_{3+j})e_7 - e_i(e_{3+j}e_7) = -2\varepsilon_{ijk}e_k \tag{8.33d}$$

$$\begin{aligned}(e_{3+i}e_j)e_7 + e_{3+i}(e_je_7) &= (-\delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k})e_7 + e_{3+i}(-e_{3+j})\\ &= \delta_{ij}e_0 - \varepsilon_{ijk}e_k + \delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}e_k = 2\delta_{ij}e_0\end{aligned} \tag{8.33e}$$

$$(e_{3+i}e_j)e_7 - e_{3+i}(e_je_7) = -2\varepsilon_{ijk}e_k \tag{8.33f}$$

$$\begin{aligned}(e_{3+i}e_{3+j})e_7 + e_{3+i}(e_{3+j}e_7) &= (-\delta_{ij}e_0 - \varepsilon_{ijk}e_k)e_7 + e_{3+i}e_j\\ &= -\delta_{ij}e_7 + \varepsilon_{ijk}e_{3+k} - \delta_{ij}e_7 - \varepsilon_{ijk}e_{3+k} = -2\delta_{ij}e_7\end{aligned} \tag{8.33g}$$

$$(e_{3+i}e_{3+j})e_7 - e_{3+i}(e_{3+j}e_7) = 2\varepsilon_{ijk}e_{3+k} \tag{8.33h}$$

$$\begin{aligned}e_{3+k}\circ e_l &= \frac{1}{2}[(e_{3+k}e_l)e_7 + e_{3+k}(e_le_7)]\\ &= \frac{1}{2}[(-\delta_{kl}e_7 - \varepsilon_{klm}e_{3+m})e_7 + e_{3+k}(-e_{3+l})]\\ &= \frac{1}{2}[(\delta_{kl}e_0 - \varepsilon_{klm}e_m + \delta_{kl}e_0 + \varepsilon_{klm}e_m] = \delta_{kl}e_0\end{aligned} \tag{8.33i}$$

が成り立つことを使った．これらは (1.58) から導かれる．□

さて，基準点 O は任意に選べる．ところが，因子 $U(y,x)$ の経路は，場の強さがゼロ (純ゲージあるいはピュア・ゲージ) のところでは，任意に変形できる．なぜなら，経路上の点における任意の経路の変分はその点における (経路に依存する) 場の強さに比例する [3] からである．今，ハドロンの外では，ゲージ場は純ゲージであると仮定しよう (グルーオンの閉じ込め)．すると，基準点 O を動かして，ハドロンの内部に持ってこれる．その結果，メゾン $M = q\bar{q}$ とバリオン $B = qqq$ に対する演算子

$$M_{\alpha\beta}(x,y) = \psi_\alpha(x)U^T(y,x)\psi^*_\beta(y) \tag{8.34a}$$

$$B_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = \varepsilon_{ijk}U_{il}(O,x)\psi^l_\alpha(x)U_{jm}(O,y)\psi^m_\beta(y)U_{kn}(O,z)\psi^n_\gamma(z) \tag{8.34b}$$

に含まれる経路はハドロンの内部に引かれ，それを直線で表すと，次ページの図 3 のようになる．メソンに対しては，これは，QCD 紐による閉じこめ描像と似ている [13]．ただし，QCD によるクォーク閉じこめの力学的解明がなされない限り，この直観的な描像は定性的に留まる．

以上の構成法は非結合型代数上のゲージ理論が可能かどうか，可能だとしても

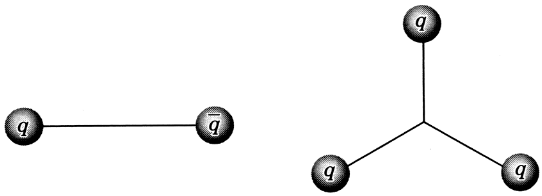


図 **4**

既存の概念で律しきれるかどうか，若干でもその問題点を提起する目的で，やや詳しく解説した．考えられる問題点としては，例えば，八元数 Dirac 場に基づいたゲージ理論の量子化，直和分解 (8.26) の正当性，$\mathfrak{H}_L$ に含まれる状態は観測可能であるのに対し，$\mathfrak{H}_T$ に含まれる状態は観測不可能であるという上で述べた仮定が厳密に証明されているわけではないことなどが挙げられよう．八元数とクォークの結びつきは，最初 Günaydin-Gürsey(1973) [4] により提案されたときに比べ，カラー $SU(3)$ の局所ゲージ群への自然な拡張がなされたとはいえ，今なおミステリアスである．ただ，八元数は例外型 Lie 群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 と密接な関係をもつ非結合型多元環であり，素粒子の大統一理論や超弦理論などにおいてもその重要性が認識されていることには触れておきたい (本書では，Günaydin-Gürsey に従って，G_2 との関係を付録 A で紹介するに過ぎない)．八元数の物理へのさまざまな応用と歴史については，文献 9) にまとめられている．

第 8 章の注および参考文献

1) C.N.Yang, 'Integral Formalism for Gauge Fields', Phys. Rev. Lett. **33**(1974), pp.445-447.

*2) この章でも，ラテン文字 i, j, k, l, m, r は 1,2,3 の値，ギリシャ文字 μ, ν は 0, 1, 2, 3 の値を取る．これまでのように，繰り返された添字については和を意味する．添字の取り得る値の範囲を指定する必要がある場合は，その旨を明記する．

3) S. Mandelstam, 'Quantum Electrodynamics without Potential', Ann. Phys. **19**(1962), pp.1-24.
A.Q.Sarker, 'On the Green's Functions of Gauge-Independent Theory of Quatum Electrodynamics', Ann. Phys. **24**(1963), pp.19-36.

4) クォークの不可思議な性質を八元数の代数構造に結びつけたのは Günaydin-Gürsey である．
M. Günaydin, F. Gürsey, 'An Octonionic Representation of Poincaré Group', Lett. Nuovo. Cimento **6**(1973), pp.401-406.; 'Quark structure and octonions', J. Math. Phys. **14**(1973), pp.1651-1667 (第 1 章注 17) で引用); 'Quark statistics and octonions', Phys. Rev. **9**(1974), pp.3387-3391.

5) スプリット基底 $\{u_0, u_0^*, u_i, u_i^*\}_{i=1,2,3}$ を用いた実数係数の八元数をスプリット八元数という．従って，任意のスプリット八元数は，$X = u_0 y_0 + u_i y_i + u_i^* y_{3+i} + u_0^* y_7, y_\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots, 7)$ とかける．これを $X = e_0 x_0 + \sum_{A=1}^{7} e_A x_A$ とおけば，$x_0 = (y_0 + y_7)/2, x_i = (y_i + y_{3+i})/2, x_{3+i} = i(y_i - y_{3+i})/2, x_7 = i(y_0 - y_7)/2$ となる．スプリット八元数の共役を $\bar{X} = e_0 x_0 - \sum_{A=1}^{7} e_A x_A$ で定義すれば，組成法則は成り立つが，$X\bar{X} = x_0^2 + x_i^2 - |x_{3+i}|^2 - |x_7|^2$ は符号数 $(4, 4)$ の 2 次形式になる (第 1 章 1.7 節参照)．それ故，零因子が存在し，最早ノルム多元環ではない．零因子が存在すること自体は，下の (8.11b) からも明らかである．

6) 局所八元数はクォークの閉じこめに関連して，
R. Casalbuoni, G. Domokos and S. Kövesi-Domokos, 'Algebraic Approach to Quark Problem', Nuovo Cimento 31(1976), pp.423-446.
が初めて導入した．次の論文に代数的 QCD の量子化の問題が議論されている．
G. Domokos and S. Kövesi-Domokos, 'Towards an algebraic quantum chromodynamics', Phys. Rev. D19 (1979), pp.2984-2996.
八元数 Dirac 場から QCD を導くこの節の方法は拙論
K. Morita, 'Algebraic Gauge Theory of Quarks and Leptons', Progr.Theor.Phys. **68**(1982), pp.2159-2175.
に基づく．非結合型代数に基づくゲージ理論の困難の性格および外微分形式を用いた可能な定式化が S. Okubo により，第 1 章文献 16) の第 9 章で議論されている．

) M. Gell-Mann and Y.Ne'eman, '*The Eightfold Way*', Benjamin, Inc. (1964).

) M.Gürnaydin, 'Octonionic Hilbert Spaces, the Poincaré group and $SU(3)$', J. Math. Phys. **17**(1976), pp.1875-1883.

) 場の理論における四元数や八元数の応用を含む代数的方法は第 1 章文献 16) で引用した F. Gürsey and C-H. Tze の本において広汎に議論されている.

0) 八元数ヒルベルト空間は
H. H. Goldstine and L. P. Horwitz, 'On a Hilbert Space with Non-associative Scalars', Proc. Natl. Acad. Sci. USA **48**(1962), pp.1134-1142.
によって始めて導入された. さらに詳細な議論は
H. H. Goldstine and L. P. Horwitz, 'Hilbert Space with Non-Associative Scalars I', Math. Annalen, **154**(1964), pp.1-27; 'Hilbert Space with Non-Associative Scalars II', Math. Annalen, **164**(1966), pp.291-316.
でなされている.

1) $U(3)$ が $SU(3)$ に制限されるのは, 自己同型が定義により代数関係 $e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k$ を保持するから. この代数関係は直和分解 (8.26) に本質的である. 一方, (8.24e) の U は一般に $U(3)$ に属する.

2) 代数的 QCD の量子化の問題については, 文献 5) の G. Domokos-S. Kövesi-Domokos の論文を見よ.

3) H. Suura, 'Derivation of a quark-confinement equation in the Hamiltonian formalism of gauge field theories', Phys. Rev. **D17**(1978), pp.469-482; 'Equation of motion for string operators in quantum chromodynamics', Phys. Rev. **D20** (1979), pp.1412-1419.

付録 A　八元数の自己同型群 G_2 の Lie 代数について

第 1 章注 17) で引用した Günaydin-Gürsey の 1973 年論文に従って，八元数の自己同型群 G_2 を求め，その Lie 代数 $\mathcal{G}_2$ についての補足的な計算をここで紹介する．

第 1 章 1.5 節で触れたように，$\mathbb{O}$ の自己同型群 G_2 は $SO(7)$ の部分群なので，基底 e_A $(A=1,2,\cdots,7)$ を固定する次のような回転を考える．

$$g(e_A)=e_A \text{ のとき}\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} g(e_B)\\ g(e_C)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_1^{(A)} & \sin\phi_1^{(A)}\\ -\sin\phi_1^{(A)} & \cos\phi_1^{(A)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_B\\ e_C\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} g(e_D)\\ g(e_E)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_2^{(A)} & \sin\phi_2^{(A)}\\ -\sin\phi_2^{(A)} & \cos\phi_2^{(A)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_D\\ e_E\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} g(e_F)\\ g(e_G)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_3^{(A)} & \sin\phi_3^{(A)}\\ -\sin\phi_3^{(A)} & \cos\phi_3^{(A)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_F\\ e_G\end{pmatrix}\end{cases} \tag{A.1a}$$

ただし，各 A に対して，$(B,C),(D,E),(F,G)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} A=1 &\to (B,C)=(2,3),(D,E)=(6,5),(F,G)=(4,7)\\ A=2 &\to (B,C)=(3,1),(D,E)=(4,6),(F,G)=(5,7)\\ A=3 &\to (B,C)=(1,2),(D,E)=(5,4),(F,G)=(6,7)\\ A=4 &\to (B,C)=(6,2),(D,E)=(3,5),(F,G)=(7,1)\\ A=5 &\to (B,C)=(1,6),(D,E)=(4,3),(F,G)=(7,2)\\ A=6 &\to (B,C)=(5,1),(D,E)=(2,4),(F,G)=(7,3)\\ A=7 &\to (B,C)=(2,5),(D,E)=(1,4),(F,G)=(3,6) \end{aligned} \tag{A.1b}$$

という値をとる．これらの値は，p.29 の図 1 において，e_A を頂点の 1 つとする実線や点線のような 3 角形を 3 つ描いたとき，e_A を含まない 3 辺の頂点 $(e_B,e_C),(e_D,e_E),(e_F,e_G)$ の番号に対応する．例えば，$A=1$ の場合の

$B, C) = (2,3), (D,E) = (6,5), (F,G) = (4,7)$ は $e_1 = e_2e_3 = e_6e_5 = e_4e_7$ 等．これらの回転の無限小生成演算子は全部で $3 \times 7 = 21$ 個あるが，それらをまとめて，$J_{AB} = -J_{BA} = -J^{\dagger}_{AB}$ $(A, B = 1, 2, \cdots, 7)$ とかく．その行列要素は $(J_{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}$ である．従って，次の交換関係に従う．

$$[J_{AB}, J_{CD}] = -(\delta_{AC}J_{BD} - \delta_{AD}J_{BC} - \delta_{BC}J_{AD} + \delta_{BD}J_{AC}) \tag{A.2}$$

これは $SO(7)$ の Lie 代数を定義する．

次に，e_A $(A = 1, 2, \cdots, 7)$ が八元数の虚数単位であれば，スカラー積 $\langle e_A, e_B\rangle = (1/2)(\bar{e}_Ae_B + \bar{e}_Be_A) = \delta_{AB}$ を不変に保つ変換群で単位元を含むものは $SO(7)$ であるが，g が八元数の自己同型であるためには，$g(e_Ae_B) = g(e_A)g(e_B) = a_{ABC}g(e_C)$ をも満たさねばならない．その結果，(A.1a) に現れる 3 つの回転角に対して条件

$$\phi_1^{(A)} + \phi_2^{(A)} + \phi_3^{(A)} = 0 \quad (2\pi \text{ を法として}), \quad A = 1, 2, \cdots, 7 \tag{A.3}$$

が成り立つ．この結果は，特定の A に対して証明しさえすればよい (残りの $B \neq A$ に対する証明は同様である)．ここでは $A = 1$ の場合のみ証明する．すなわち，

$$g(e_1) = e_1 \text{ のとき} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} g(e_2) \\ g(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_1^{(1)} & \sin\phi_1^{(1)} \\ -\sin\phi_1^{(1)} & \cos\phi_1^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g(e_6) \\ g(e_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_2^{(1)} & \sin\phi_2^{(1)} \\ -\sin\phi_2^{(1)} & \cos\phi_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_6 \\ e_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g(e_4) \\ g(e_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_3^{(1)} & \sin\phi_3^{(1)} \\ -\sin\phi_3^{(1)} & \cos\phi_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ e_7 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{A.4}$$

のケースを考える．このとき，自己同型の条件，$g(e_2)g(e_5) = g(e_7), g(e_2)g(e_4) = g(e_6), g(e_4)g(e_3) = g(e_5)$ および $g(e_3)g(e_6) = g(e_7)$ から，初等的な方法で (A.3) の $A = 1$ の関係式が導かれる．他の自己同型の条件，$g(e_2)g(e_3) = g(e_1) = e_1, g(e_1)g(e_6) = e_1g(e_6) = g(e_5), g(e_1)g(e_4) = e_1g(e_4) = g(e_7)$ からは新しい条件式は出てこない．同様にして，(A.3) の残りのケース $(A = 2, 3, \cdots, 7)$ も証明される．このようにして，$SO(7)$ の持つ独立な回転角は，八元数の自己同型に制約すると，21 から $2 \times 7 = 14$ に減る．

次に，

$$\begin{cases} e_1(e_2+ie_3) = -i(e_2+ie_3) \\ e_1(e_6+ie_5) = -i(e_6+ie_5) \\ e_1(e_4+ie_7) = -i(e_4+ie_7) \end{cases} \qquad \begin{cases} e_2(e_3+ie_1) = -i(e_3+ie_1) \\ e_2(e_4+ie_6) = -i(e_4+ie_6) \\ e_2(e_5+ie_7) = -i(e_5+ie_7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_3(e_1+ie_2) = -i(e_1+ie_2) \\ e_3(e_5+ie_4) = -i(e_5+ie_4) \\ e_3(e_6+ie_7) = -i(e_6+ie_7) \end{cases} \qquad \begin{cases} e_4(e_6+ie_2) = -i(e_6+ie_2) \\ e_4(e_3+ie_5) = -i(e_3+ie_5) \\ e_4(e_7+ie_1) = -i(e_7+ie_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_5(e_1+ie_6) = -i(e_1+ie_6) \\ e_5(e_4+ie_3) = -i(e_4+ie_3) \\ e_5(e_7+ie_2) = -i(e_7+ie_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} e_6(e_5+ie_1) = -i(e_5+ie_1) \\ e_6(e_2+ie_4) = -i(e_2+ie_4) \\ e_6(e_7+ie_3) = -i(e_7+ie_3) \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\begin{cases} e_7(e_1+ie_4) = -i(e_1+ie_4) \\ e_7(e_3+ie_6) = -i(e_3+ie_6) \\ e_7(e_2+ie_5) = -i(e_2+ie_5) \end{cases}$$

を使って，(A.1a) をすべての $A = 1, 2, \cdots, 7$ の場合にまとめ直すと，

$$\begin{cases} g(e_1) = e_1 \\ \begin{pmatrix} g(e_2)+ig(e_3) \\ g(e_6)+ig(e_5) \\ g(e_4)+ig(e_7) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(1)}\lambda_3+\beta^{(1)}\lambda_8)e_1\right] \begin{pmatrix} e_2+ie_3 \\ e_6+ie_5 \\ e_4+ie_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(1)}+\beta^{(1)\prime})}(e_2+ie_3) \\ e^{-i(-\alpha^{(1)}+\beta^{(1)\prime})}(e_6+ie_5) \\ e^{-i(-2\beta^{(1)\prime})}(e_4+ie_7) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(e_2) = e_2 \\ \begin{pmatrix} g(e_3)+ig(e_1) \\ g(e_4)+ig(e_6) \\ g(e_5)+ig(e_7) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(2)}\lambda_3+\beta^{(2)}\lambda_8)e_2\right] \begin{pmatrix} e_3+ie_1 \\ e_4+ie_6 \\ e_5+ie_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(2)}+\beta^{(2)\prime})}(e_3+ie_1) \\ e^{-i(-\alpha^{(2)}+\beta^{(2)\prime})}(e_4+ie_6) \\ e^{-i(-2\beta^{(2)\prime})}(e_5+ie_7) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(e_3) = e_3 \\ \begin{pmatrix} g(e_1)+ig(e_2) \\ g(e_5)+ig(e_4) \\ g(e_6)+ig(e_7) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(3)}\lambda_3+\beta^{(3)}\lambda_8)e_3\right] \begin{pmatrix} e_1+ie_2 \\ e_5+ie_4 \\ e_6+ie_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(3)}+\beta^{(3)\prime})}(e_1+ie_2) \\ e^{-i(-\alpha^{(3)}+\beta^{(3)\prime})}(e_5+ie_4) \\ e^{-i(-2\beta^{(3)\prime})}(e_6+ie_7) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(e_4) = e_4 \\ \begin{pmatrix} g(e_6)+ig(e_2) \\ g(e_3)+ig(e_5) \\ g(e_7)+ig(e_1) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(4)}\lambda_3+\beta^{(4)}\lambda_8)e_4\right] \begin{pmatrix} e_6+ie_2 \\ e_3+ie_5 \\ e_7+ie_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(4)}+\beta^{(4)\prime})}(e_6+ie_2) \\ e^{-i(-\alpha^{(4)}+\beta^{(4)\prime})}(e_3+ie_5) \\ e^{-i(-2\beta^{(4)\prime})}(e_7+ie_1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad g(e_5) = e_5 \\ \begin{pmatrix} g(e_1) + ig(e_6) \\ g(e_4) + ig(e_3) \\ g(e_7) + ig(e_2) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(5)}\lambda_3 + \beta^{(5)}\lambda_8)e_5\right] \begin{pmatrix} e_1 + ie_6 \\ e_4 + ie_3 \\ e_7 + ie_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(5)}+\beta^{(5)\prime})}(e_1 + ie_6) \\ e^{-i(-\alpha^{(5)}+\beta^{(5)\prime})}(e_4 + ie_3) \\ e^{-i(-2\beta^{(5)\prime})}(e_7 + ie_2) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad g(e_6) = e_6 \\ \begin{pmatrix} g(e_5) + ig(e_1) \\ g(e_2) + ig(e_4) \\ g(e_7) + ig(e_3) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(6)}\lambda_3 + \beta^{(6)}\lambda_8)e_6\right] \begin{pmatrix} e_5 + ie_1 \\ e_2 + ie_4 \\ e_7 + ie_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(6)}+\beta^{(6)\prime})}(e_5 + ie_1) \\ e^{-i(-\alpha^{(6)}+\beta^{(6)\prime})}(e_2 + ie_4) \\ e^{-i(-2\beta^{(6)\prime})}(e_7 + ie_3) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad g(e_7) = e_7 \\ \begin{pmatrix} g(e_2) + ig(e_5) \\ g(e_1) + ig(e_4) \\ g(e_3) + ig(e_6) \end{pmatrix} = \exp\left[(\alpha^{(7)}\lambda_3 + \beta^{(7)}\lambda_8)e_7\right] \begin{pmatrix} e_2 + ie_5 \\ e_1 + ie_4 \\ e_3 + ie_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha^{(7)}+\beta^{(7)\prime})}(e_2 + ie_5) \\ e^{-i(-\alpha^{(7)}+\beta^{(7)\prime})}(e_1 + ie_4) \\ e^{-i(-2\beta^{(7)\prime})}(e_3 + ie_6) \end{pmatrix} \end{cases}$$

となる．ここで，

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

は Gell-Mann 行列である．また，各指数の中の e_A は $-i$ におき換えることができ，$\beta^{(A)\prime} = \beta^{(A)}/\sqrt{3}$ とおけば，(A.1a) に現れるパラメータは (2π を法として)，

$$\phi_1^{(A)} = \alpha^{(A)} + \beta^{(A)\prime},\ \phi_2^{(A)} = -\alpha^{(A)} + \beta^{(A)\prime},\ \phi_3^{(A)} = -2\beta^{(A)\prime} = -(\phi_1^{(A)} + \phi_2^{(A)}) \tag{A.6}$$

で与えられる．対応する無限小回転の生成子は 7 次元空間の無限小回転の生成演算子を $(AB) \equiv J_{AB}$ とかく．$\beta^{(A)} = 0\,(A = 1, 2, \cdots, 7)$ とおいて，無限小の $\alpha^{(A)}$ に対して，

$$\begin{aligned} g(e_1) = e_1 &\rightarrow X_7 = \frac{1}{2}[(23) + (56)] \\ g(e_2) = e_2 &\rightarrow X_5 = \frac{1}{2}[(13) + (46)] \\ g(e_3) = e_3 &\rightarrow X_2 = \frac{1}{2}[(12) + (45)] \\ g(e_4) = e_4 &\rightarrow X_6 = \frac{1}{2}[(35) + (26)] \\ g(e_5) = e_5 &\rightarrow X_4 = \frac{1}{2}[(16) + (34)] \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$g(e_6) = e_6 \to X_1 = \frac{1}{2}[(24) + (15)]$$
$$g(e_7) = e_7 \to X_3 = \frac{1}{2}[(14) + (52)]$$

$\alpha^{(A)} = 0\,(A = 1, 2, \cdots, 7)$ とおいて，無限小の $\beta^{(A)}$ に対して，

$$\begin{aligned}
g(e_1) = e_1 \to X_9 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(23) + (65) + 2(74)] \\
g(e_2) = e_2 \to X_{10} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(31) + (46) + 2(75)] \\
g(e_3) = e_3 \to X_{11} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(12) + (54) + 2(76)] \\
g(e_4) = e_4 \to X_{12} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(62) + (35) + 2(17)] \\
g(e_5) = e_5 \to X_{13} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(16) + (43) + 2(27)] \\
g(e_6) = e_6 \to X_{14} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(51) + (24) + 2(37)] \\
g(e_7) = e_7 \to X_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(25) + (14) + 2(63)]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

で与えられる．ただし，規格化は $\mathrm{tr}\,(X_\alpha X_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, 14$ と選んだ．$\{X_\alpha\}_{\alpha=1,2,\cdots,14}$ が G_2 の生成演算子で，その Lie 代数 $\mathcal{G}_2$ を張る．

次に，これらの生成演算子の交換関係を求める．14 個の生成演算子のうち，e_7 軸を含む平面 (合計 6 平面) の回転を含まない生成演算子 $\{X_a\}_{a=1,2,\cdots,8}$ はよく知られた $SU(3)$ の交換関係を満たす．

$$[X_a, X_b] = -f_{abc}X_c, \quad f_{abc}\ :\ SU(3)\ \text{の構造定数} \tag{A.9}$$

従って，$SU(3)$ は G_2 の部分群である．残りは，

$$\begin{aligned}
T_i &= X_{8+i} + iX_{11+i} \\
\bar{T}_i &= X_{8+i} - iX_{11+i}, \quad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

と分けることにすれば，

$$[X_a, T_i] = \frac{i}{2}T_j(\lambda_a)_{ji}$$
$$[X_a, \bar{T}_i] = -\frac{i}{2}(\lambda_a)_{ji}\bar{T}_j$$

$$[T_i, \bar{T}_j] = i(\lambda_a)_{ji} X_a \tag{A.11}$$
$$[T_i, T_j] = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ijk} \bar{T}_k$$
$$[\bar{T}_i, \bar{T}_j] = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{ijk} T_k$$

となることがわかる．ただし，λ_a $(a = 1, 2, \cdots, 8)$ は Gell-Mann 行列である．交換関係 (A.9), (A.11) は任意の表現において成り立つ．

このような記号は，G_2 の 14 次元随伴表現を $SU(3)$ 分解するのに適している．自己同型を $g = e^D$ によって，その微分で表すと，D は

$$D(XY) = (DX)Y + X(DY), \quad X, Y \in \mathbb{O}$$

を満足する．その行列表現を

$$De_A = e_B D^{BA}$$

とおけば，明らかに，

$$\begin{aligned}
(D^{BA}) &= (X_\alpha^{BA}) D^\alpha = X_a D^a + X_{8+i} D^{8+i} + X_{11+i} D^{11+i} \\
&\qquad (a = 1, 2, \cdots, 8\ ;\ i = 1, 2, 3) \\
&= X_a D^a + \frac{1}{2}(T_i + \bar{T}_i) D^{8+i} + \frac{1}{2i}(T_i - \bar{T}_i) D^{11+i} \\
&= X_a D^a + \frac{1}{2} T_i (D^{8+i} - iD^{11+i}) + \frac{1}{2} \bar{T}_i (D^{8+i} + iD^{11+i}) \\
&= X_a D^a + T_i \bar{\delta}^i + \bar{T}_i \delta^i \\
\bar{\delta}^i &= \frac{1}{2}(D^{8+i} - iD^{11+i}) \\
\delta^i &= \frac{1}{2}(D^{8+i} + iD^{11+i})
\end{aligned}$$

とかける．これは，G_2 の随伴表現 $\mathbf{14}$ の $SU(3)$ 分解 $\mathbf{14} = \mathbf{8} + \mathbf{3} + \mathbf{3}^*$ に対応する．

付録B　$\boldsymbol{Spin(2,\mathbb{H})}$ 行列の性質

ここでは，$Spin(2,\mathbb{H})$ 行列のいくつかの性質についてまとめておく．

4.4 節で定義した，固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ に局所同型な四元数スピノル群 $Spin(2,\mathbb{H})$ に属する 2 次元四元数ローレンツ行列

$$Spin(2,\mathbb{H}) \ni \mathsf{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix}, \quad Q, P \in \mathbb{H}, \quad \overline{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \mathbf{1}_2 \to \begin{cases} |Q|^2 - |P|^2 = 1 \\ \mathrm{Re}\,[Q\overline{P}] = 0 \end{cases}$$

は次の性質をもつ．

$$\text{(I)} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} = e^{B(q,p)}$$

$$B(q,p) = \begin{pmatrix} q & -p \\ p & q \end{pmatrix}, \quad q, p \in \mathbb{H}_0 = \{q \in \mathbb{H}; \bar{q} = -q\}$$

$$\text{(II)} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} = R(a)B(\mu) = B(\mu')R(a), \begin{cases} \mu = -Q^{-1}P \in \mathbb{H}_0 \\ \mu' = -PQ^{-1} \in \mathbb{H}_0 \end{cases}$$

$$R(a) = e^{B(q,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{Q}{|Q|} = e^q, \quad q \in \mathbb{H}_0 \cdots (\text{空間回転の行列})$$

$$B(\mu) = e^{B(0,p)} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = -\frac{p}{|p|} \tanh|p|, \quad p \in \mathbb{H}_0 \cdots (\text{ブーストの行列})$$

(I) の証明は帰納法による．右辺の展開

$$e^{B(q,p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n(q,p)$$

における第 n 項が A のと同じ形をしていると仮定する．

$$e^{B(q,p)} \text{ の第 } n \text{ 項 } \equiv \frac{1}{(n-1)!}B^{n-1}(q,p) = \begin{pmatrix} Q' & -P' \\ P' & Q' \end{pmatrix}$$

このとき，第 $(n+1)$ 項は

$$\begin{aligned} e^{B(q,p)} \text{ の第 } (n+1) \text{ 項 } &\equiv \frac{1}{n!}B^{n}(q,p) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} Q' & -P' \\ P' & Q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -p \\ p & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} Q'q - P'p & -Q'p - P'q \\ P'q + Q'p & -P'p + Q'q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられ，再び A の形をしている．展開の第 1 項 $\mathbf{1}_2$ および第 2 項 $B(q,p)$ は既に A の形をしているので，和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^n(q,p)$ が A の形をしていることが証明された．一方, A は $B = B(q,p)$ が純四元数の行列であることから，$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} = e^{\bar{B}}e^{B} = e^{-B}e^{B} = \mathbf{1}_2$ を満たす．それ故 $\mathsf{A} \in Spin(2,\mathbb{H})$ である．その結果，$\mathsf{A} \in Spin(2,\mathbb{H})$ の無限小生成演算子は

$$B(q,p) = \begin{pmatrix} q & -p \\ p & q \end{pmatrix} = q^i\Lambda_i + p^i\Gamma_i$$

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & e_i \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -e_i \\ e_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1,2,3)$$

のように与えられる．ここで、Γ_i は (4.19b)，Λ_i は (5.12) で与えられたものと同じである．$\{\Lambda_i, \Gamma_i\}_{i=1,2,3}$ の交換関係は

$$\begin{cases} [\Lambda_i, \Lambda_j] = 2\varepsilon_{ijk}\Lambda_k \\ [\Lambda_i, \Gamma_j] = 2\varepsilon_{ijk}\Gamma_k \\ [\Gamma_i, \Gamma_j] = -2\varepsilon_{ijk}\Lambda_k \end{cases} \qquad (i,j,k = 1,2,3)$$

であって，これを共変化したものが (4.43a) の

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\mu\tilde{\Gamma}^\nu - \Gamma^\nu\tilde{\Gamma}^\mu), \quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

$$\Sigma^{i0} = \Gamma^i, \quad \Sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk}\Lambda^k, \quad (i,j,k = 1,2,3)$$

である．

(II) の第 2 の等式は，$P=-Q\mu$ とおき，$1+\mu^2=1-|\mu|^2=1-|Q^{-1}P|^2=|Q|^{-2}(|Q|^2-|P|^2)=|Q|^{-2}$ に注意すれば得られる．同様に第 3 の等式は，$P=-\mu' Q$ とおけばよい．すると，$1+\mu'^2=|Q|^{-2}$ である．$R(a)$ は対角行列であるが，四元数が非可換なので，非可換である (これは Λ^i が非可換であることに反映している)．すなわち，$a_1a_2\neq a_2a_1$ ならば $R(a_1)R(a_2)=R(a_1a_2)\neq R(a_2a_1)=R(a_2)R(a_1)$．対角行列が可換であるのはもちろん可換体の上で定義された場合に限る．

(II) の $R(a)$ に対する表式は

$$
\begin{aligned}
e^{B(q,0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} e^q & 0 \\ 0 & e^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

において，$q\in\mathbb{H}_0$ から $a=e^q$ が単位四元数であることがわかる．(II) の $B(\mu)$ に対する表式を得るのには次の展開

$$
\begin{aligned}
e^{B(0,p)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -p^2 & 0 \\ 0 & -p^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \cosh|p| & -(p/|p|)\sinh|p| \\ (p/|p|)\sinh|p| & \cosh|p| \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

を用いた．ただし，$\mu=-(p/|p|)\tanh|p|, 1/\sqrt{1+\mu^2}=\cosh|p|$ とおいた．

行列 $R(a)$ が空間回転を記述することは，(4.37) に従って，

$$
\mathsf{X}' = R(a)\mathsf{X}R^\dagger(a) = x^0\Gamma_0 + \begin{pmatrix} 0 & -a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})a^{-1} \\ a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})a^{-1} & 0 \end{pmatrix}
$$

を $a=\cos(\theta/2)+(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\sin(\theta/2)$ ($q=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}(\theta/2)$, $\boldsymbol{n}^2=1$ に対応) の場合に計算すれば，

$$
\begin{aligned}
x^{0\prime} &= x^0 \\
\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})(1-\cos\theta) + \boldsymbol{x}\cos\theta - (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{n})\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$x^{i\prime} = R^i{}_j x^j \ (i,j=1,2,3)$$
$$R^i{}_j = R_{ij} = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j)\cos\theta - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\theta \ (i,j,k=1,2,3)$$

となることからわかる．この式を (1.41d) と比べれば，$R(a)$ は $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 軸回りのベクトル $\boldsymbol{x}$ の角度 θ の空間回転を表す．四元数は非可換なので，$R(a)$ は対角行列であるが，$a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ ならば，$R(a_1)R(a_2) \neq R(a_2)R(a_1)$ となる (既述).

行列 $B(\mu)$ がブーストを表すことは，同様に (4.37) に従って，$\mathsf{X}' = B(\mu)\mathsf{X}B^\dagger(\mu)$ を $\mu = (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\tanh(\zeta/2)$ ($p = -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}(\zeta/2)$ に対応) の場合に計算すれば，

$$x'^0 = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}x^0 - \frac{1}{1+\mu^2}(\mu(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})\mu) = (\cosh\zeta)\,x^0 + (\sinh\zeta)\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{e} = \frac{1}{1+\mu^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e} - \mu(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})\mu + 2\mu\,x^0)$$
$$= \Big[\boldsymbol{x} + (\cosh\zeta - 1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) + (\sinh\zeta)x^0\boldsymbol{n}\Big]\cdot\boldsymbol{e}$$

$x^{\mu\prime} = H^\mu{}_\nu x^\nu$, $\quad (\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $\quad H = (H^\mu{}_\nu)$ は (2.11c) で与えられた行列

となることからわかる．この場合，ブーストの方向は $\boldsymbol{n}$, rapidity は ζ である．

上の公式 (II) を用いて行う簡単な演習問題を四元数計算の練習問題の 1 つとして紹介しよう．$R(a)$ は回転群を記述し，固有ローレンツ群の部分群であることはすぐわかる．一方，$B(\mu)$ は固有ローレンツ群の部分群をなさない．なぜなら，2 つのブーストを続けると，一般に座標軸の回転を伴うからである．すなわち，積が閉じない．このよく知られた事実を，今の場合，式でかくと，

$$B(\mu_2)B(\mu_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\begin{pmatrix} 1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}\sqrt{1+\mu_1^2}}\begin{pmatrix} 1-\mu_2\mu_1 & \mu_1+\mu_2 \\ -(\mu_1+\mu_2) & 1-\mu_2\mu_1 \end{pmatrix}$$
$$= R(a)B(\mu)$$

のようになる．ここで，μ, a は

$$\mu_1 + \mu_2 = (1-\mu_2\mu_1)\mu, \quad \mu \in \mathbb{H}_0$$

$$a = \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu_2^2}\sqrt{1+\mu_1^2}}(1-\mu_2\mu_1)$$

で定義される．μ を純四元数と選ぶのは，$B(\mu)$ がブーストを表すために必要である．a が単位四元数であることは次のようにしてわかる．μ の定義から，

$$1+\mu^2 = 1-|\mu|^2 = 1-|\mu_1+\mu_2|^2|1-\mu_2\mu_1|^{-2} = \frac{|1-\mu_2\mu_1|^2-|\mu_1+\mu_2|^2}{|1-\mu_2\mu_1|^2}$$

であるが，この式の分子は，$\mu_{1,2}$ が純四元数であることを考慮して，

$$\begin{aligned}|1-\mu_2\mu_1|^2-|\mu_1+\mu_2|^2 &= (1-\mu_2\mu_1)(1-\mu_1\mu_2)+(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)\\ &= 1-(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_1)+\mu_1^2\mu_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2+(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_1)\\ &= 1+\mu_1^2\mu_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2 = (1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)\end{aligned}$$

となるから，

$$|a| = \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu_2^2}\sqrt{1+\mu_1^2}}|1-\mu_2\mu_1| = 1$$

が証明される．

さて，μ の定義から，$\mu_1 \equiv \boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{e}, \mu_2 \equiv \boldsymbol{\mu}_2\cdot\boldsymbol{e}, \mu \equiv \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}$ とかけば，

$$\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}(1+\boldsymbol{\mu}_2\cdot\boldsymbol{\mu}_1)-(\boldsymbol{\mu}_2\times\boldsymbol{\mu}_1)\times\boldsymbol{\mu}$$

$$\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{\mu}_1\times\boldsymbol{\mu}_2) = 0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^2 &= \frac{|\mu_1+\mu_2|^2}{|1-\mu_1\mu_2|^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}_1^2+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_2^2}{(1+\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2)^2+(\boldsymbol{\mu}_1\times\boldsymbol{\mu}_2)^2}\\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_1^2+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_2^2}{1+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+(\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2)^2+\boldsymbol{\mu}_1^2\boldsymbol{\mu}_2^2-(\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2)^2}\\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_1^2+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_2^2}{1+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_1^2\boldsymbol{\mu}_2^2}\end{aligned}$$

$$1-\boldsymbol{\mu}^2 = \frac{(1-\boldsymbol{\mu}_1^2)(1-\boldsymbol{\mu}_2^2)}{1+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_1^2\boldsymbol{\mu}_2^2}$$

$$\begin{aligned}a &= \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\mu}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\mu}_1^2}\sqrt{1-\boldsymbol{\mu}_2^2}}(1+\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2-(\boldsymbol{\mu}_2\times\boldsymbol{\mu}_1)\cdot\boldsymbol{e})\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\mu}_1^2\boldsymbol{\mu}_2^2}}(1+\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2-(\boldsymbol{\mu}_2\times\boldsymbol{\mu}_1)\cdot\boldsymbol{e})\end{aligned}$$

が得られる．特に，$\boldsymbol{\mu}_1$ と $\boldsymbol{\mu}_2$ が平行なときには，

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{n}\tanh(\zeta_1/2), \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{n}\tanh(\zeta_2/2), \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{n}\tanh(\zeta/2)$$

とかけて，よく知られた結果

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2, \qquad a = 1$$

になる．一般の場合は，$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{n}_1\tanh(\zeta_1/2), \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{n}_2\tanh(\zeta_2/2), \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{n}\tanh(\zeta/2)$ とおいて，

$$\tanh^2(\zeta/2)$$
$$= \frac{\tanh^2(\zeta_1/2) + 2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2) + \tanh^2(\zeta_2/2)}{1 + 2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2) + \tanh^2(\zeta_1/2)\tanh^2(\zeta_2/2)}$$

$$a = \cos(\theta/2) + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}_r)\sin(\theta/2)$$

$$\cos(\theta/2)$$
$$= \frac{1 + (\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2))\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2)}{\sqrt{1 + 2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2) + \tanh^2(\zeta_1/2)\tanh^2(\zeta_2/2)}}$$

$$\sin(\theta/2)$$
$$= \frac{|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2)}{\sqrt{1 + 2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)\tanh(\zeta_1/2)\tanh(\zeta_2/2) + \tanh^2(\zeta_1/2)\tanh^2(\zeta_2/2)}}$$

$$\boldsymbol{n}_r = \frac{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{n}_r$ は回転軸の方を示す単位ベクトル，θ は回転角である．

ここで，第 2 のブーストが無限小の場合を考える．第 2 の慣性系が第 1 の慣性系に対して相対速度 $\boldsymbol{v}$ を持つとすれば，$\boldsymbol{v}/c = -\boldsymbol{n}_1\tanh\zeta_1$ である (ここより以下 c を復活)．第 2 のブーストは速度の微小な変化 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ をもたらすとして，

$$\boldsymbol{n}_2\tanh\zeta_2 \approx \boldsymbol{n}_2\zeta_2 = -d\boldsymbol{v}/c$$

と近似できる．また回転角は

$$\sin(\theta/2) \approx \theta/2 = |\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|(\zeta_2/2)\tanh(\zeta_1/2)$$

となるので，座標軸の微小な回転は

$$\begin{aligned}\theta \boldsymbol{n}_r &= 2(\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)(\zeta_2/2)\tanh(\zeta_1/2)\\ &= \frac{\tanh(\zeta_1/2)}{c^2\tanh\zeta_1}(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v}) = \frac{\cosh\zeta_1 - 1}{c^2\tanh^2\zeta_1\cosh\zeta_1}(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v})\\ &= \frac{\gamma-1}{v^2\gamma}(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v}), \quad \gamma = \cosh\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}\end{aligned}$$

で与えられる．さらに，非相対論的近似を取って，$(\gamma-1)/\gamma \approx v^2/(2c^2)$ とすれば，

$$\theta \boldsymbol{n}_r \approx \frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v})$$

を得る．これから有名な **Thomas の歳差運動**の公式に導かれる．

付録C　四元数 Dirac 方程式の解について

ここでは，四元数 Dirac 方程式 (5.10)，(5.13)の解を求めて，(5.26) の関係式を証明する．

(5.23) により，任意の表示における Dirac スピノルは次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{\Psi}) &= (S^{-1}\psi, \Omega S^{*\,-1}\psi^*) = (S^{-1}\psi, \Omega S^T\psi^*)\\ &= S^{-1}(\psi, \gamma_5 C\bar{\psi}^T) = S^{-1}(\psi, \gamma_5\psi^c)\end{aligned} \tag{C.1}$$

ここで，$S^{-1}\psi = \psi_P$ は Pauli 表示の結果 (5.31a) に現れる ψ のことである (以下，Pauli 表示の量には添字 P を付ける)．この ψ, ψ^c にテキストの (3.54a), (3.57c) を代入して，

$$\begin{aligned}S\rho(\boldsymbol{\Psi}) = \Big(\psi &= \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[a(\boldsymbol{p},r)u^{(r)}(p)e^{ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p},r)v^{(r)}(p)e^{-ipx}],\\ \gamma_5\psi^c &= \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[a^\dagger(\boldsymbol{p},r)\gamma_5 C\bar{u}^{(r)\,T}(p)e^{-ipx} + b(\boldsymbol{p},r)\gamma_5 C\bar{v}^{(r)\,T}(p)e^{ipx}]\Big)\end{aligned} \tag{C.2}$$

を得る．一方

$$S\rho(\boldsymbol{\Psi}) = S\rho(\boldsymbol{\Psi}_+) + S\rho(\boldsymbol{\Psi}_-) = \Big(S\rho(\boldsymbol{\Psi}_+), S\rho(\boldsymbol{\Psi}_-)\Big) \tag{C.3}$$

の右辺にテキストの (5.9) を代入すれば，

$$\begin{aligned}S\rho(\boldsymbol{\Psi}) = \Big(\psi &= \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[a(\boldsymbol{p},r)S\rho(U_+^{(r)}(p))e^{ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p},r)S\rho(V_+^{(r)}(p))e^{-ipx}],\\ \gamma_5\psi^c &= \sum_{r=\pm}\int_{\boldsymbol{p}}[a^\dagger(\boldsymbol{p},r)S\rho(U_-^{(r)}(p))e^{-ipx} + b(\boldsymbol{p},r)S\rho(V_-^{(r)}(p))e^{ipx}]\Big)\end{aligned} \tag{C.4}$$

が得られる．(C.2) と (C.4) を較べて，

$$S\rho(U^{(r)}(p)) = \Big(S\rho(U_+^{(r)}), S\rho(U_-^{(r)})\Big) = \Big(u^{(r)}(p), \gamma_5 C\bar{u}^{(r)\,T}(p)\Big) \tag{C.5a}$$

$$S\rho(V^{(r)}(p)) = \left(S\rho(V_+^{(r)}), S\rho(V_-^{(r)})\right) = \left(v^{(r)}(p), \gamma_5 C\bar{v}^{(r)\,T}(p)\right) \qquad \text{(C.5b)}$$

が導かれるが，これは Pauli 表示で求めた

$$\rho(U^{(r)}(p)) = \left(\rho(U_+^{(r)}), \rho(U_-^{(r)})\right) = \left(u_P^{(r)}(p), \gamma_5^P C_P \bar{u}_P^{(r)\,T}(p)\right) \qquad \text{(C.6a)}$$

$$\rho(V^{(r)}(p)) = \left(\rho(V_+^{(r)}), \rho(V_-^{(r)})\right) = \left(v_P^{(r)}(p), \gamma_5^P C_P \bar{v}_P^{(r)\,T}(p)\right) \qquad \text{(C.6b)}$$

から任意表示の Dirac スピノルを与える式である．

四元数 Dirac スピノル $U_\pm^{(r)}(p) = U^{(r)}(p)E_\pm, V_\pm^{(r)}(p) = V^{(r)}(p)E_\pm \ (r = \pm)$ の満たす四元数 Dirac 方程式 (5.10)，(5.12)，(5.13) は

$$\begin{pmatrix} -p^0 + m & \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} & -(p^0 + m) \end{pmatrix} U_\pm^{(r)}(p) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -(p^0 + m) & \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} & -p^0 + m \end{pmatrix} V_\pm^{(r)}(p) = 0$$

$$s(\boldsymbol{p})U_\pm^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} U_\pm^{(r)}(p) = rU_\pm^{(r)}(p)e_3$$

$$s(\boldsymbol{p})V_\pm^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} V_\pm^{(r)} = -rV_\pm^{(r)}(p)e_3 \qquad \text{(C.7)}$$

となるが，

$$\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r) = r(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_3$$

$$\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_2 = r(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_3e_2 = -r(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_2e_3 \qquad \text{(C.8)}$$

が成り立つことから，(C.7) の解は

$$U_\pm^{(r)}(p) = \alpha_{(r)\,\pm}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0 + m}}\begin{pmatrix} p^0 + m \\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)E_\pm \qquad \text{(C.9a)}$$

$$V_\pm^{(r)}(p) = \beta_{(r)\,\pm}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0 + m}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} \\ p^0 + m \end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_2E_\pm \qquad \text{(C.9b)}$$

で与えられることがわかる．ここで，規格化定数 $\alpha_{(r)\,\pm}, \beta_{(r)\,\pm}$ は

$$\mathrm{Re}\,[U_\pm^{(r)\,\dagger}(p)U_\pm^{(s)}(p)]$$

$$= \alpha^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\alpha^{-1}_{(s)\,\pm}\frac{1}{p^0+m}\mathrm{Re}\,[E^\dagger_\pm(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)\left(p^0+m,\ \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\right)$$
$$\times\begin{pmatrix}p^0+m\\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3+s)E_\pm]$$
$$= \alpha^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\alpha^{-1}_{(s)\,\pm}(2p^0)\mathrm{Re}\,[(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3+s)E_\pm]$$
$$= p^0\alpha^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\alpha^{-1}_{(s)\,\pm}(1+rs+(s+r)\hat{p}_3)$$
$$= 2p^0|\alpha_{(r)\,\pm}|^{-2}(1+r\hat{p}_3)\delta_{rs} = p^0\delta_{rs} \tag{C.10a}$$

から

$$|\alpha_{(r)\,\pm}|^2 = 2(1+r\hat{p}_3) \tag{C.10b}$$

同様に

$$\mathrm{Re}\,[V^{(r)\,\dagger}_\pm(p)V^{(s)}_\pm(p)] \tag{C.10c}$$
$$= \beta^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\beta^{-1}_{(s)\,\pm}\frac{1}{p^0+m}\mathrm{Re}\,[E^\dagger_\pm(-e_2)(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)\left(-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p},\ p^0+m\right)$$
$$\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\\ p^0+m\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3+s)e_2E_\pm]$$
$$= \beta^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\beta^{-1}_{(s)\,\pm}(2p^0)\mathrm{Re}\,[-e_2(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3+s)e_2E_\pm]$$
$$= p^0\beta^{*\,-1}_{(r)\,\pm}\beta^{-1}_{(s)\,\pm}[1+rs+(r+s)\hat{p}_3]$$
$$= 2p^0|\beta_{(r)\,\pm}|^{-2}(1+r\hat{p}_3)\delta_{rs} = p^0\delta_{rs} \tag{C.10d}$$

から

$$|\beta_{(r)\,\pm}|^2 = 2(1+r\hat{p}_3) \tag{C.10e}$$

が得られる (直交条件 (5.14b) は容易に示せる)．これらを使えば，

$$\sum_{r=\pm}|\alpha_{(r)\,\pm}|^{-2}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3+r)E_\pm E^\dagger_\pm(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)$$
$$= \Big[\sum_{r=\pm}|\alpha_{(r))\,\pm}|^{-2}(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)E_\pm(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+r)\Big]$$
$$= \Big[|\alpha_{(+)\,\pm}|^{-2}(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+1)E_\pm(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+1) \tag{C.11a}$$
$$+|\alpha_{(-)\,\pm}|^{-2}(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-1)E_\pm(\pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1+\hat{p}_3}(1+\hat{p}_3)(1 \pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) + \frac{1}{1-\hat{p}_3}(1-\hat{p}_3)(1 \mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\Big] = 1 \quad \text{(C.11b)}$$

および $e_2 E_\pm(-e_2) = E_\mp$ だから，

$$\sum_{r=\pm} |\beta_{(r)\,\pm}|^{-2}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 + r)e_2 E_\pm E_\pm^\dagger(-e_2)(-e_3\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + r)$$

$$= \Big[\sum_{r=\pm} |\beta_{(r))\,\pm}|^{-2}(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + r)E_\mp(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + r)\Big]$$

$$= \Big[|\beta_{(+)\,\pm}|^{-2}(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + 1)E_\mp(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + 1)$$

$$+ |\beta_{(-)\,\pm}|^{-2}(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - 1)E_\mp(\mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} - 1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1+\hat{p}_3}(1+\hat{p}_3)(1 \mp i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) + \frac{1}{1-\hat{p}_3}(1-\hat{p}_3)(1 \pm i\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\Big] = 1 \quad \text{(C.11c)}$$

が証明されるので，完全性の条件 (5.15) が成り立つ．

(C.9a,b) の Pauli 表現が，(C.6) の記法に従って，Pauli 表示における Dirac スピノル $u_P^{(\pm)}(p), v_P^{(\pm)}(p)$ を与える．

$$\rho(U_+^{(\pm)}(p)) = \alpha_{(\pm)\,+}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\rho(\begin{pmatrix} p^0+m \\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 \pm 1)E_+)$$

$$= \alpha_{(\pm)\,+}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix} (p^0+m)1_2 \\ i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \pm 1_2]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix} (p^0+m)w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}}) \\ i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix} = u_P^{(\pm)}(p)$$

$$\rho(V_+^{(\pm)}(p)) = \beta_{(\pm)\,+}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\rho(\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} \\ p^0+m\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 \pm 1)e_2E_+)$$

$$= \beta_{(\pm)\,+}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix} -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ (p^0+m)1_2\end{pmatrix}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sigma_3 \pm 1_2](-i\sigma_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varpi w^{(\pm)\,*}(\hat{\boldsymbol{p}}) \\ -i(p^0+m)\varpi w^{(\pm)\,*}(\hat{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix} = v_P^{(\pm)}(p) \quad \text{(C.12a)}$$

$$\rho(U_-^{(\pm)}(p)) = \beta_{(\pm)\,-}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\rho(\begin{pmatrix} p^0+m \\ -\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3 \pm 1)E_-)$$

$$= \beta^{-1}_{(\pm)-}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}(p^0+m)1_2\\ i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}[-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\pm 1_2]\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}(p^0+m)\varpi w^{(\pm)*}(\hat{\boldsymbol{p}})\\ i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varpi w^{(\pm)*}(\hat{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix} = \gamma_5^P C_P \bar{u}_P^{(\pm)\,T}(p) \quad \text{(C.12b)}$$

$$\rho(V_-^{(\pm)}(p)) = \beta^{-1}_{(\pm)-}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\rho(\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\\ p^0+m\end{pmatrix}(-\boldsymbol{e}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}e_3\pm 1)e_2E_-)$$

$$= \beta^{-1}_{(\pm)-}\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ (p^0+m)1_2\end{pmatrix}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sigma_3\pm 1_2](-i\sigma_2)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{p^0+m}}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}})\\ -i(p^0+m)w^{(\pm)}(\hat{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix} = \gamma_5^P C_P \bar{v}_P^{(\pm)*}(p) \quad \text{(C.12c)}$$

(C.12) に現れるヘリシティ・スピノルは (3.56e) で与えられたものと一致するように，条件 (C.10b,e) を満たす規格化定数を選んだ．最後にユニタリ行列 $S = \begin{pmatrix}1_2 & 0_2\\ 0_2 & i1_2\end{pmatrix}$ を左から掛けて標準表示における Dirac スピノル (3.56a,b) が (C.5) によって得られる．

四元数形式における (運動量空間の) Dirac スピノルの計算は，4 成分形式と違って，$(u^{(r)}(p), \gamma_5 C\bar{u}^{(r)\,T}(p))$ および $(v^{(r)}(p), \gamma_5 C\bar{v}^{(r)\,T}(p))$ の各ペアを同時に与えている点が大きく異なる．

付録D　(8.19) 式の証明

第 8 章で構成したゲージ理論において，重要な役割を果たした (8.19) 式の証明を以下丁寧に与える．

問題は $u_n = u_n(x), u_n^* = u_n^*(x), (n = 0, 1, 2, 3)$ を仮定した (8.11b) が定義する局所八元数 $\mathbb{O}_x$ が異なる時空点で同型になるための条件を求めることに他ならない (これは局所四元数に対する (8.3a) の条件からその解 (8.3b) を求めたことに対応する)．そのためには，局所八元数の代数を定義する乗積表 (8.11b) から，局所的に定義されたスプリット基底のゲージ不変微分を求めればよい (以下，引数の x はすべて省略する)．そのための条件は

$$(\nabla_\mu u_0)u_0 + u_0(\nabla_\mu u_0) = \nabla_\mu u_0 \tag{D.1a}$$

$$(\nabla_\mu u_0^*)u_0 + u_0^*(\nabla_\mu u_0) = 0 \tag{D.1b}$$

$$(\nabla_\mu u_i)u_0 + u_i(\nabla_\mu u_0) = 0 \tag{D.1c}$$

$$(\nabla_\mu u_0^*)u_i + u_0^*(\nabla_\mu u_i) = 0 \tag{D.1d}$$

$$(\nabla_\mu u_0)u_i + u_0(\nabla_\mu u_i) = \nabla_\mu u_i \tag{D.1e}$$

$$(\nabla_\mu u_i)u_0^* + u_i(\nabla_\mu u_0^*) = \nabla_\mu u_i \tag{D.1f}$$

$$(\nabla_\mu u_i)u_j + u_i(\nabla_\mu u_j) = \varepsilon_{ijk}\nabla_\mu u_k^* \tag{D.1g}$$

$$(\nabla_\mu u_i)u_j^* + u_i(\nabla_\mu u_j^*) = -\delta_{ij}\nabla_\mu u_0 \tag{D.1h}$$

およびこれらの複素共役である．ゲージ変換 (8.12a) に対する各ゲージ不変微分は

$$\nabla_\mu u_0 = u_0 a_\mu + u_0^* b_\mu + u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i \tag{D.2a}$$

$$\nabla_\mu u_0^* = u_0 b_\mu^* + u_0^* a_\mu^* + u_i b_\mu^{i*} + u_i^* a_\mu^{i*} \tag{D.2b}$$

$$\nabla_\mu u_i = u_0 e_\mu^i + u_0^* f_\mu^i + u_j e_\mu^{ji} + u_j^* f_\mu^{ji} \tag{D.2c}$$

$$\nabla_\mu u_i^* = u_0 f_\mu^{i*} + u_0^* e_\mu^{i*} + u_j f_\mu^{ji*} + u_j^* e_\mu^{ji*} \tag{D.2d}$$

の形をしている．係数 a_μ などは条件 (D.1) およびを乗積表 (8.11b) を使って順次次のように定める．

［1］ (D.2a) を (D.1a) に代入:

$$(u_0 a_\mu + u_0^* b_\mu + u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i) u_0 + u_0 (u_0 a_\mu + u_0^* b_\mu + u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i)$$

$$= u_0 a_\mu + u_0^* b_\mu + u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i$$

$$u_0 a_\mu + u_i^* b_\mu^i + u_0 a_\mu + u_i a_\mu^i = u_0 a_\mu + u_0^* b_\mu + u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i$$

$$\therefore \quad a_\mu = b_\mu = 0 \to \nabla_\mu u_0 = u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i \tag{D.3}$$

［2］ (D.3) およびその複素共役を (D.1b) に代入：

$$(+u_i^* a_\mu^{i*} + u_i b_\mu^{i*}) u_0 + u_0^* (u_i a_\mu^i + u_i^* b_\mu^i) = 0 \to u_i^* a_\mu^{i*} + u_i^* b_\mu^i = 0$$

$$\therefore \quad a_\mu^{i*} + b_\mu^i = 0 \to \nabla_\mu u_0 = u_i a_\mu^i - u_i^* a_\mu^{i*} \tag{D.4}$$

［3］ (D.2c)，(D.4) を (D.1c) に代入：

$$(\nabla_\mu u_i) u_0 + u_i (\nabla u_0) = 0$$

$$(u_0 e_\mu^i + u_0^* f_\mu^i + u_j e_\mu^{ji} + u_j^* f_\mu^{ji}) u_0 + u_i (u_j a_\mu^j - u_j^* a^{j*}) = 0$$

$$u_0 e_\mu^i + u_j^* f_\mu^{ji} \varepsilon_{ijk} u_k^* a_\mu^j + u_0 a^{i*} = 0$$

$$\therefore e_\mu^i = -a_\mu^{i*}, \quad f_\mu^{ji} = \varepsilon_{ijk} a_\mu^k$$

この第 1 式は下の (D.7) に，第 2 式は (D.5) 第 2 式に等しい．

［4］ (D.4) の複素共役と (D.2c) を (D.1d) に代入：

$$(u_j^* a_\mu^{j*} - u_j a_\mu^j) u_i + u_0^* (u_0 e_\mu^i + u_0^* f_\mu^i + u_j e_\mu{}^{ji} + u_j^* f_\mu{}^{ji}) = 0$$

$$- u_0^* a_\mu^{i*} - \varepsilon_{jik} u_k^* a_\mu^j + u_0^* f_\mu^i + u_j^* f_\mu{}^{ji} = 0$$

$$\longrightarrow f_\mu^i = a_\mu^{i*}, \quad f_\mu{}^{ji} = \varepsilon_{ijk} a_\mu^k \tag{D.5}$$

が得られ，(D.2c) は

$$\nabla_\mu u_i = u_0 e_\mu^i + u_0^* a_\mu^{i*} + u_j e_\mu^{ji} + \varepsilon_{ijk} u_j^* a_\mu^k \tag{D.6}$$

となる．

［5］ (D.6), (D.4) を (D.1e) に代入：

$$(u_j a_\mu^j - u_j^* a_\mu^{j*}) u_i + u_0 (u_0 e_\mu^i + u_0^* a_\mu^{i*} + u_j e_\mu^{ji} + \varepsilon_{ijk} u_j^* a_\mu^k)$$

$$= u_0 e^i_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu$$

$$\varepsilon_{jik} u_k^* a^j_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_0 e^i_\mu + u_j e^{ji}_\mu$$

$$= u_0 e^i_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu$$

(これからは条件が出ない)

［6］　(D.6) および (D.4) の複素共役を (D.1f) に代入：

$$(u_0 e^i_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu) u_0^* + u_i (u_j^* a^{j*}_\mu - u_j a^j_\mu)$$

$$= u_0 e^i_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu$$

$$u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu - u_0 a^{i*}_\mu - \varepsilon_{ijk} u_k^* a^j_\mu = u_0 e^i_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu$$

$$\longrightarrow e^i_\mu = -a^{i*}_\mu \to \nabla_\mu u_i = -u_0 a^{i*}_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_j e^{ji}_\mu + \varepsilon_{ijk} u_j^* a^k_\mu \qquad \text{(D.7)}$$

［7］　(D.7) およびその複素共役を (D.1g) に代入：

$$(-u_0 a^{i*}_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_l e^{li}_\mu + \varepsilon_{ilk} u_l^* a^k_\mu) u_j$$

$$+ u_i (-u_0 a^{j*}_\mu + u_0^* a^{j*}_\mu + u_k e^{kj}_\mu + \varepsilon_{jlk} u_l^* a^k_\mu)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (-u_0^* a^k_\mu + u_0 a^k_\mu + u_l^* e^{lk*}_\mu + \varepsilon_{klm} u_l a^{m*}_\mu)$$

$$- u_j a^{i*}_\mu + \varepsilon_{ljk} u_k^* e^{li}_\mu - \varepsilon_{ijk} u_0^* a^k_\mu + u_i a^{j*}_\mu + \varepsilon_{ikl} u_l^* e_\mu{}^{kj} - \varepsilon_{jik} u_0 a^k_\mu$$

$$= -\varepsilon_{ijk} u_0^* a^k_\mu + \varepsilon_{ijk} u_0 a^k_\mu + \varepsilon_{ijk} u_l^* e^{lk*}_\mu + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_l a^{m*}_\mu$$

$$= -\varepsilon_{ijk} u_0^* a^k_\mu + \varepsilon_{ijk} u_0 a^k_\mu + \varepsilon_{ijk} u_l^* e^{lk*}_\mu + u_i a^{j*}_\mu - u_j a^{i*}_\mu$$

$$+ \varepsilon_{ljk} u_k^* e^{li}_\mu + \varepsilon_{ikl} u_l^* e^{kj}_\mu = \varepsilon_{ijk} u_l^* e^{lk*}_\mu \to \varepsilon_{kjl} e^{ki}_\mu + \varepsilon_{ikl} e^{kj}_\mu = \varepsilon_{ijk} e^{lk*}_\mu \quad \text{(D.8)}$$

［8］　(D.7) およびその複素共役と (D.4) を (D.1h) に代入：

$$(-u_0 a^{i*}_\mu + u_0^* a^{i*}_\mu + u_l e^{li}_\mu + \varepsilon_{ilk} u_l^* a^k_\mu) u_j^*$$

$$+ u_i (-u_0^* a^j_\mu + u_0 a^j_\mu + u_l^* e^{lj*}_\mu + \varepsilon_{jlk} u_l a^{k*}_\mu)$$

$$= -\delta_{ij} (u_l a^l_\mu - u_l^* a^{l*}_\mu)$$

$$u_j^* a^{i*}_\mu - \delta_{lj} u_0 e^{li}_\mu + \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{ljm} u_m a^k_\mu - u_i a^j_\mu - \delta_{il} u_0 e_\mu{}^{lj*} + \varepsilon_{jlk}\varepsilon_{ilm} u_m^* a_\mu{}^{k*}$$

$$= u_j^* a^{i*}_\mu - u_0 e^{ji}_\mu - \delta_{ij} u_k a^k_\mu + u_i a^j_\mu - u_i a^j_\mu - u_0 e_\mu{}^{ij*} + \delta_{ji} u_k^* a_\mu{}^{k*} - u_j^* a^{i*}_\mu$$

$$= -\delta_{ij} (u_l a^l_\mu - u_l^* a^{l*}_\mu)$$

$$\longrightarrow e_\mu{}^{ij*} + e_\mu^{ji} = 0 \tag{D.9}$$

これを (D.8) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kjl} e_\mu^{ki} + \varepsilon_{ikl} e_\mu^{kj} &= -\varepsilon_{ijk} e_\mu^{kl} \\
\varepsilon_{itl}(\varepsilon_{kjl} e_\mu^{ki} + \varepsilon_{ikl} e_\mu^{kj}) &= -\varepsilon_{itl}\varepsilon_{ijk} e_\mu^{kl} \\
(\delta_{ik}\delta_{tj} - \delta_{ij}\delta_{tk}) e_\mu^{ki} + 2\delta_{tk} e_\mu^{kj} &= -(\delta_{tj}\delta_{lk} - \delta_{tk}\delta_{lj}) e_\mu^{kl} \\
\delta_{tj} e_\mu{}^{ii} - \delta_{ij} e_\mu{}^{ti} + 2 e_\mu{}^{tj} &= -\delta_{tj} e_\mu{}^{ll} + e_\mu^{tj} \\
\therefore \quad e_\mu{}^{ii} &= 0
\end{aligned} \tag{D.10}$$

以上の計算によって，

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu u_0 &= u_i a_\mu^i - u_i^* a_\mu^{i*} \\
\nabla_\mu u_0^* &= u_i^* a_\mu^{i*} - u_i a_\mu^i \\
\nabla_\mu u_i &= -u_0 a_\mu^{i*} + u_0^* a_\mu^{i*} + u_j e_\mu^{ji} + \varepsilon_{ijk} u_j^* a_\mu^k \\
\nabla_\mu u_i^* &= -u_0^* a_\mu^i + u_0 a_\mu^i + u_j^* e_\mu^{ji*} + \varepsilon_{ijk} u_j a_\mu^{k*}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

が得られた．ここで，本文 (8.19) の記号に移るには，

$$a_\mu^i = -\beta_\mu^{i\,\dagger}, \quad e_\mu^{ji} = b^*_{\mu\,ji} = -b_{\mu,ij}, \quad b_{\mu,ii} = 0 \tag{D.12}$$

すなわち，$b_\mu = (b_{\mu,ij})$ は反エルミートでトレースレスである．すると，

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu u_0 &= -u_i \beta_\mu^{i\,\dagger} + u_i^* \beta_\mu^i \\
\nabla_\mu u_0^* &= -u_i^* \beta_\mu^i + u_i \beta_\mu^{i\,\dagger} \\
\nabla_\mu u_i &= u_0 \beta_\mu^i - u_0^* \beta_\mu^i - u_j b_{\mu,\,ij} - \varepsilon_{ijk} u_j^* \beta_\mu^{k\,\dagger} \\
\nabla_\mu u_i^* &= u_0^* \beta_\mu^{i\,\dagger} - u_0 \beta_\mu^{i\,\dagger} + u_j^* b_{\mu,\,ji} - \varepsilon_{ijk} u_j \beta_\mu^k
\end{aligned} \tag{D.13}$$

となる．これが (8.19).

なお，局所 $SU(3)$ 変換 (8.12a) のもとでの変換性は次の通りである．

$$\begin{aligned}
\beta_\mu^i &\to \beta_\mu^{i\,\prime} = U_{ij} \beta_\mu^j \\
\beta_\mu^{i\dagger} &\to \beta_\mu^{i\,\prime\dagger} = U_{ij}^* \beta_\mu^{j\dagger} \\
b_\mu &\to b_\mu{}' = U b_\mu U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger
\end{aligned} \tag{D.14}$$

あとがき

素粒子論の王道からはかけ離れていてポピュラーではないので，時代遅れに見えるかもしれないこの本を通して，筆者は，四元数の計算ルールは極めて明快であり，一旦それに慣れると，四元数の物理への応用に関する視野がぐっと広がることを強調してきたつもりである．特に，四元数スピノル群の導入により，4 次元時空と四元数の関係が全くの偶然とは思われない数学的形式が存在するのではないか，四元数の既約な行列表現は 2 次元に限られるという数学的事実は物理世界において意味あるのではないかという予想を述べてきた．この数学的事実は，スピン 1/2 の クォーク・レプトンが flavor ダブレットでしか存在しないというこれまでの実験事実の背景には四元数が潜んでいるのではないかと推測したくなる (flavor トリプレットの存在も可能である).

また，八元数は非結合型の多元環なので，行列表現は存在しないけれど，その自己同型群の部分群に $SU(3)$ があるので，$SU(3)$ ゲージ理論 (QCD) が作れるのではないかという予想も述べた．ただ，非結合型の多元環上のゲージ理論が無矛盾であるという証明はまだない．それにもかかわらず,「四元数・八元数に興味を持っていただきたい」という本書に託した筆者の思いが，読者諸兄に幾分なりとも伝われば，2 年に及ぶ執筆を続けた筆者の望外の喜びである．

筆者が名古屋大学に在職中は，四元数の本を書くことなど露ほども考えなかったが，退職後の 2006 年 10 月信州大学で行われた研究会において「四元数と素粒子及び八元数場のゲージ理論」というタイトルで拙い講演をしたとき,「総合報告はありませんか?」と若い人から好意的な反応があり，またその研究会で四元数行列式についての文献を教わったのが，直接的にはこの本を書く動機になった．

2011 年 7 月

森田　克貞

索　引

人名

項目

あ行

た行

な行

は行

ま行

や行

ら行

わ行

森田克貞（もりた・かつさだ）

著者略歴

1942 年　京都市に生まれる
1964 年　京都大学理学部物理学科卒業
1969 年　名古屋大学理学部助手
1970 年　京都大学理学博士
1971〜72 年　カナダ・ダルハウジー大学に滞在
1995 年　名古屋大学理学部助教授
2005 年　名古屋大学大学院理学研究科退職
現　在　中部大学非常勤講師，名城大学非常勤講師
専　攻　素粒子論

著　書

江沢 洋 編『数理物理への誘い 3』(分担執筆，遊星社)

四元数（しげんすう）・八元数（はちげんすう）とディラック理論（りろん）

2011 年 8 月 30 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者	森　田　克　貞
発行者	黒　田　敏　正
発行所	株式会社 日本評論社 〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4 電話　(03) 3987-8621［販売］ (03) 3987-8599［編集］
印　刷	藤原印刷株式会社
製　本	松岳社
装　幀	林　健造

ISBN978-4-535-78676-9